SPAŢII METRICE

Spaţiile metrice sunt caracterizate de o distanţă între obiecte matematice de acelaşi fel: numere, puncte, funcţii etc. Constituie cadrul natural de prezentare a unor noţiuni fundamentale în Analiza Matematică: şir convergent, limita şi continuitatea funcţiilor etc.

Definiţie. Fie $X \neq \emptyset$. O aplicaţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe X dacă au loc:
D_1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*pozitivitatea distanţei*);
D_2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *(simetria);*
D_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*
Perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric.*

Observaţie. Pe o aceeaşi mulţime se pot defini mai multe metrici. În raport cu fiecare, mulţimea devine un alt spaţiu, cu proprietăţi specifice.

Propoziţie. Într-un spaţiu metric (X, d) au loc:
i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n), \forall x_1, x_2, ..., x_n \in X;$
ii) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X;$
iii) $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X.$

Demonstraţie. i) Se aplică succesiv inegalitatea triunghiulară.
ii) $\forall x, y, z \in X$, avem $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, de unde $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$.
Procedând analog sau schimbând între ele rolurile lui x şi y şi folosind proprietatea de simetrie a metricii obţinem şi $d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x)$, de unde $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X$.
iii) Folosind i) şi simetria metricii avem $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$, de unde $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y')$.
Procedând analog sau schimbând rolurile lui x şi y cu x' şi y' şi folosind proprietatea de simetrie a metricii obţinem şi $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$, de unde $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$.

Exemple de spaţii metrice:
i) $(\mathbb{R}, d)$, unde $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$, este spaţiu metric.
Demonstraţia este imediată.

ii) Fie A o mulţime oarecare nevidă şi $\mathcal{B}(A) = \{f : A \to \mathbb{R}; f$ mărginită pe $A\}$. Atunci funcţia $d : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+, d(f, g) = \sup\limits_{x \in A} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A)$, este o metrică pe $\mathcal{B}(A)$.

Demonstraţie. d este bine definită.
$D_1 : \forall f, g \in \mathcal{B}(A), d(f, g) \geq 0$ şi $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ (pe A);
$D_2 : d(f, g) = d(g, f), \forall f, g \in \mathcal{B}(A);$

$D_3 : \forall f, g, h \in \mathcal{B}(A), \forall x \in A,$

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in A}|f(x) - g(x)| + \sup_{x \in A}|g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Trecând la supremum în membrul stâng, avem
$\sup_{x \in A}|f(x) - h(x)| = d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$

iii) Fie X o mulţime nevidă oarecare. Funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ este metrică pe X, numită *metrica discretă*.

Demonstraţie. $D_1 : \forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
$D_2 : d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
$D_3 : \forall x, y, z \in X$,
$\cdot$ dacă $x \neq y \neq z \neq x$, atunci $d(x, z) = 1 < d(x, y) + d(y, z) = 2$
$\cdot$ dacă $x = z \neq y$, atunci $d(x, z) = 0 < d(x, y) + d(y, z) = 1$
$\cdot$ dacă $x \neq y = z$, atunci $d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$
$\cdot$ dacă $x = y \neq z$, atunci $d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$
$\cdot$ dacă $x = y = z$, atunci $d(x, z) = 0 = d(x, y) + d(y, z)$.

SPAŢII VECTORIALE NORMATE.

Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial (liniar) real (peste $\mathbb{R}$) ("+" - adunarea, "$\cdot$" - înmulţirea cu scalari reali). Sunt satisfăcute deci următoarele axiome:

1) asociativitatea: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X$;
2) existenţa elementului neutru (*originea*): $\exists \theta \in X$ astfel încât $\forall x \in X, x + \theta = \theta + x = x$;
3) $\forall x \in X, \exists -x \in X$ (*opusul* lui x) astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;
4) comutativitatea: $x + y = y + x, \forall x, y \in X$.
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
8) $1 \cdot x = x, \forall x \in X$.

Definiţie. O funcţie $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *normă* pe spaţiul vectorial X dacă:

N_1 $||x|| \geq 0, \forall x \in X; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(pozitivitatea normei);*
N_2 $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogenitatea);*
N_3 $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea $(X, ||\cdot||)$ se numeşte *spaţiu normat.*

Observaţie. În raport cu fiecare normă definită pe un acelaşi spaţiu vectorial, acesta devine un alt spaţiu, cu proprietăţi specifice.

Propoziţie. Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu liniar normat. Atunci:
I)

$$\begin{aligned} \text{i) } |||x|| - ||y||| &\leq ||x-y||, \forall x, y \in X; \\ \text{ii) } ||\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n|| &\leq |\lambda_1| \cdot ||u_1|| + |\lambda_2| \cdot ||u_2|| + ... + |\lambda_n| \cdot ||u_n||, \\ \forall \lambda_i &\in \mathbb{R}, \forall u_i \in X, i = \overline{1,n}; \end{aligned}$$

II) Funcţia $d(x,y) = ||x-y||, \forall x, y \in X$, este o distanţă pe X, cu proprietăţile:
i) $d(x+z, y+z) = d(x,y), \forall x, y, z \in X$;
ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. I) i) $\forall x, y \in X, ||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y|| + ||y||$, deci $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$. Schimbând rolurile între x şi y sau repetând procedeul: $||y|| = ||(y-x)+x|| \leq ||y-x|| + ||x|| = ||x-y|| + ||x||$, deci $||y|| - ||x|| \leq ||x-y||$, se obţine concluzia.
I) ii) Se aplică succesiv omogenitatea şi inegalitatea triunghiulară.
II) Afirmaţiile sunt imediate, folosind proprietăţile normei.

Observaţie. Orice spaţiu liniar normat poate fi organizat ca spaţiu metric (aşa cum am observat anterior, orice normă $||\cdot||$ induce o distanţă d. În plus, $||x|| = d(x, \theta)), \forall x \in X$.
Reciproca nu este adevărată (pentru definirea noţiunii de metrică nu se cere structură de spaţiu liniar; chiar dacă X ar fi spaţiu liniar, se pot defini metrici care să nu provină din norme, *vezi seminar*).

Exemple de spaţii normate.
i) $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$ ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spaţiu liniar), $||x|| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Demonstraţia este imediată.

ii) Fie A o mulţime oarecare nevidă. Se observă cu uşurinţă că $(\mathcal{B}(A), +, \cdot)$ este spaţiu liniar.
Funcţia $||\cdot|| : \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{x\in A}|f(x)|, \forall f \in \mathcal{B}(A)$, este o normă, numită *norma uniformă*, care induce distanţa $d(f,g) = \sup\limits_{x\in A}|f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A)$.

Demonstraţie. $N_1 : \forall f \in \mathcal{B}(A), ||f|| \geq 0$ şi $||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (0 este aici funcţia identic nulă);
$N_2 : ||\lambda f|| = \sup\limits_{x\in A}|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in A}|f(x)| = |\lambda| \cdot ||f||, \forall f \in \mathcal{B}(A)$;

$N_3 : \forall f, g \in \mathcal{B}(A), \forall x \in A,$

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \sup_{x\in A}|f(x)| + \sup_{x\in A}|g(x)| = ||f||+||g||.$$

Trecând la supremum în membrul stâng, avem
$\sup\limits_{x\in A}|f(x)+g(x)| = ||f+g|| \leq ||f||+||g||.$

SPAŢIUL $\mathbb{R}^k$

Fie $\mathbb{R}$, mulţimea numerelor reale, iar $k \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat.

Prin definiţie, spaţiul $\mathbb{R}^k$ este produsul cartezian $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times ... \times\mathbb{R}}_{k \text{ ori}}$.

(amintim că produsul cartezian al două mulţimi A şi B este $A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$).

Prin urmare, un element $x \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, unde $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,k}$ se numesc *componentele* lui x.

Elementele spaţiului $\mathbb{R}^k$ se numesc *vectori*.

Observăm următoarele:

Pentru $k = 1$, se obţine $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, care reprezintă din punct de vedere geometric punctele axei reale (dreapta reală);

Pentru $k = 2$, se obţine $\mathbb{R}^2$, care reprezintă mulţimea punctelor din plan (raportat la un sistem ortogonal de axe) (planul)

$$x = (x_1, x_2) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2) \leftrightarrows \overrightarrow{OP} \text{ (vector de poziţie);}$$

Pentru $k = 3$, se obţine $\mathbb{R}^3$, care reprezintă mulţimea punctelor din spaţiu (raportat la un sistem triortogonal de axe) (spaţiul)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrows \overrightarrow{OP} \text{ (vector de poziţie).}$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$. Atunci $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

Egalitatea a doi vectori: $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i$, $\forall i = \overline{1,k}$ (pe componente).

Vom defini în cele ce urmează suma (adunarea) vectorilor:

După cum este cunoscut, în $\mathbb{R}^2$, adunarea a doi vectori $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ se face după regula paralelogramului, rezultând vectorul sumă, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

După acelaşi model, se defineşte *adunarea în* $\mathbb{R}^k$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$, definim *suma vectorilor* x *şi* y, ca fiind vectorul

$(1) : x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k)$ (se defineşte pe componente).

Înmulţirea cu scalari (reali): $\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, definim

(2) $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)$ (pe componente).

Teoremă. *Spaţiul* $\mathbb{R}^k$ *înzestrat cu operaţiile de adunare a vectorilor şi înmulţire a unui vector cu un scalar are structură de spaţiu liniar (sau vectorial) real.*

Demonstraţie. $(\mathbb{R}^k, +)$ este grup comutativ:

1) asociativitatea: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$;

2) existenţa elementului neutru: $\exists 0 = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$ (numit *vectorul nul* sau *originea spaţiului* $\mathbb{R}^k$) astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}^k, x + 0 = 0 + x = x$;

3) $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \exists -x = (-x_1, -x_2, ..., -x_k) \in \mathbb{R}^k$ (opusul lui x) astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

4) comutativitatea: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

$(\mathbb{R}^k, \cdot)$:

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Într-adevăr, $(\lambda+\mu)x = (\lambda+\mu)(x_1, x_2, ..., x_k) = ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2, ..., (\lambda+\mu)x_k) =$

$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, ..., \lambda x_k + \mu x_k) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)+$

$+(\mu x_1, \mu x_2, ..., \mu x_k) = \lambda x + \mu x$;

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8) $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Norma euclidiană (în $\mathbb{R}^k$)

Introducem în cele ce urmează următoarea normă remarcabilă pe $\mathbb{R}^k$, numită *normă euclidiană*, despre care vom vedea că reprezintă generalizarea naturală la $\mathbb{R}^k$ a funcţiei modul din $\mathbb{R}$ (distanţa de la un punct la origine).

$|| \cdot || : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k),$

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}.$$

Observaţie. i) Pentru $k = 1$, $||x|| = \sqrt{x^2} = |x|-$distanţa de la punct la origine;

Pentru $k = 2$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - distanţa de la punct la origine;

Pentru $k = 3$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - distanţa de la punct la origine.

ii) Norma euclidiană satisface toate proprietăţile $N_1 - N_3$ ale unei norme:

N_1 : Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_k), x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, k}$, oarecare. Evident, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \geq 0$.

De asemenea, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$, $\forall i = \overline{1, k} \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_k) = 0$.

$N_2 : \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)|| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + ... + \lambda^2 x_k^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)} = |\lambda| ||x||.$

$N_3: \forall x, y \in \mathbb{R}^k, ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + ... + (x_k+y_k)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2}$ (inegalitatea lui Minkowski) $\Leftrightarrow (x_1 + y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + ... + (x_k+y_k)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2) + (y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2) +$
$+2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2} \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2}$ (A) (inegalitatea lui Cauchy -Buniakowski-Schwartz).

Astfel, $(\mathbb{R}^k, ||\cdot||)$ formează un **spaţiu vectorial (liniar) real normat** ($||\cdot||$ fiind aici norma euclidiană).

Teoremă. *Norma euclidiană are, de asemenea, următoarele proprietăţi*:

$$\begin{aligned} N_4 \ |x_i| &\leq ||x|| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|, \forall i = \overline{1,k}; \\ N_5 \ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= 2(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

(*identitatea paralelogramului*, datorită interpretării evidente în plan).

Demonstraţie. $N_4: \forall x \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k), x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}, |x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq ||x||$, iar $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|$ (se verifică imediat prin ridicare la pătrat).
$N_5: \forall x, y \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k), x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}$,
$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i+y_i)^2 + \sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2 = 2(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} y_i^2) = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Definiţie. Numim *versor,* un vector $x \in \mathbb{R}^k$, cu (norma euclidiană) $||x|| = 1$.

Dacă $k = 3$, versorii $i = (1,0,0); j = (0,1,0); k = (0,0,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Orice vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$.
În general (în $\mathbb{R}^k$), versorii $e_1 = (1,0,0,...,0); e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_k = (0,0,0,...,0,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^k$. Orice vector $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ke_k$.

Probleme propuse.

I. 1. Determinaţi toate normele pe $\mathbb{R}$.

2. Fie $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Arătaţi că d este o metrică pe $\mathbb{R}$ care nu provine dintr-o normă. Generalizare: $d: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i-y_i|}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, este o metrică pe $\mathbb{R}^k$, care nu provine dintr-o normă.

3. Arătaţi că:

i) $d_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, d_1(x, y) = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i|$,

$d_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, d_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$,

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$

sunt distanţe pe $\mathbb{R}^k$;

ii) $|| \cdot ||_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, ||x||_1 = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^k$,

$|| \cdot ||_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, ||x||_2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^k$,

sunt norme pe $\mathbb{R}^k$ care induc distanţele de mai sus.

4. Fie $(X_i, d_i), i = \overline{1, n}$, spaţii metrice oarecare. Considerăm $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ şi definim $d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X, x_i, y_i \in X_i, \forall i = \overline{1, n}$. Arătaţi că d este metrică pe spaţiul produs al celor n spaţii metrice ((X, d) se numeşte *spaţiul metric produs)*.

5. Fie (X, d) un spaţiu metric. Arătaţi că $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_+, d_1(x, y) = \ln(1 + d(x, y)), \forall x, y \in X$, este o metrică pe X.

6. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = |arctgx - arctgy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

i) d este metrică pe $\mathbb{R}$;

ii) $d(n + p, n) < \frac{1}{n}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*$.

7. i) Fie $\mathcal{C}^1([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, f, f'$ continue pe $[a, b]\}$. Arătaţi că:

i) $d : \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b]) \to \mathbb{R}_+$,

$d(f, g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$, este o metrică pe $\mathcal{C}^1([a, b])$.

ii) Calculaţi distanţa în $\mathcal{C}^1([0, 1])$ pentru $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in [0, 1]$.

iii) Este aplicaţia $|| \cdot || : \mathcal{C}^1([0, 1]) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$ o normă pe $\mathcal{C}^1([0, 1])$? ($\mathcal{C}^1([0, 1])$ este spaţiu liniar).

8. Fie $l^2 = \{x = (x_n)_{n\geq1}, x_n \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ (mulţimea şirurilor $x = (x_n)_{n\geq1}$ cu proprietatea că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$) (o generalizare infinit dimensională a spaţiului $\mathbb{R}^n$).

I) Arătaţi că:

i) $(l^2, +, \cdot)$ (adunare şi înmulţire cu scalari la şiruri) este spaţiu liniar real.

ii) Funcţia $|| \cdot ||_2 : l^2 \to \mathbb{R}_+$, $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}, \forall x \in l^2$, este o normă pe l^2.

iii) Calculaţi distanţa în l^2 dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n\geq1}$ şi $y = (y_n = \frac{1}{n(n+1)})_{n\geq1}$.

II) Generalizare pentru $l^p (p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2)$.

9. Fie l^∞, spaţiul şirurilor mărginite.

i) Arătaţi că $(l^\infty, +, \cdot)$ este spaţiu liniar real, iar aplicaţia $||\cdot||_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}_+, ||x||_\infty = \sup\limits_n |x_n|, \forall x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$, este o normă pe l^∞.

ii) Calculaţi distanţa în l^∞ dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ şi $y = (y_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n})_{n\geq 1}$.

10. Fie $\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ continuă pe $[a,b]\}$. Arătaţi că:

i) Aplicaţia $||\cdot|| : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$ este o normă pe $\mathcal{C}([a,b])$ (spaţiu liniar real);

ii) Funcţia $d : \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}_+, d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ este o distanţă pe $\mathcal{C}([a,b])$ şi calculaţi $d(f,g)$ pentru $f(x) = x, g(x) = \ln x, x \in [\frac{1}{e}, e]$.

11. Găsiţi interpretări în plan ale inegalităţilor următoare şi justificaţi-le:

i) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y), \forall x, y, z \in X$;

ii) $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'), \forall x, y, x', y' \in X$ (*inegalitatea patrulaterului*).

(pentru i): Lungimea oricărei laturi a unui triunghi este cel puţin egală cu diferenţa lungimilor celorlalte două;

pentru ii): Într-un patrulater, diferenţa lungimilor a două laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi).

II. 1. Determinaţi domeniile de definiţie ale funcţiilor următoare şi figuraţi-le:

i) $f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

ii) $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$;

iii) $f(x,y) = \sqrt{y - x}$;

iv) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$;

v) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$;

vi) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

2. Figuraţi următoarele mulţimi:

i) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 < 4, y \neq x + 1\}$;

ii) $A = \{(x,y); 0 < y < x + 1\}$;

iii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1, x \geq 0\}$;

iv) $A = \{(x,y); 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4, x > 0\}$;

v) $A = \{(x,y); 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$;

vi) $A = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$;

vii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$;

viii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, x \geq -y^2, y \leq 0\}$;

ix) $A = \{(x,y); 1 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$;

x) $A = \{(x,y); x^2 + y \geq 1, x + y \leq \sqrt{2}, x - y \leq \sqrt{2}, x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$;

xi) $A = \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

xii) $A = \{(x_1,x_2); \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$;

xiii) $A = \{(x_1,x_2); |x_1| + |x_2| < 1\}$;

xiv) $A = \{(x, y); xy \neq 0, xy \geq -1\}$;
xv) $A = \{(x, y, z); x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z \geq 0\}$;
xvi) $A = \{(x, y, z); x + y + z < 1\}$.

Distanţa euclidiană (indusă de norma euclidiană) (în $\mathbb{R}^k$).

Introducem în continuare o altă aplicaţie, de această dată pe produsul cartezian $\mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$, aplicaţie despre care vom vedea că reprezintă generalizarea naturală a noţiunii de distanţă dintre două puncte ale dreptei reale, precum şi a distanţei dintre două puncte din plan (respectiv, spaţiu).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^k, x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_k - y_k)$.

Definim *distanţa euclidiană dintre* $x, y \in \mathbb{R}^k$, astfel:

$$d(x,y) = ||x-y||(= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_k-y_k)^2}).$$

Rezultă astfel metrica veritabilă (datorită modului în care a fost definită) $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$.

Observaţie. Pentru $k = 1$, $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$;
Pentru $k = 2$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$;
Pentru $k = 3$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$.

Desigur, în $\mathbb{R}^k$ se pot defini şi alte norme şi metrici (*vezi seminar*).

Produs scalar (în $\mathbb{R}^k$)**.**

Aşa cum am observat până acum, în $\mathbb{R}^k$ am putut deocamdată măsura distanţele, dar nu şi unghiurile, ceea ce limitează posibilitatea de interpretare geometrică. De aceea, în continuare, vom introduce produsul scalar al doi vectori, cu ajutorul căruia vom putea exprima lungimile vectorilor, dar şi măsurile unghiurilor pe care aceştia le formează.

Aşadar, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, introducem *produsul scalar al vectorilor x şi y*, astfel:

$$(x,y)(=< x,y >) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i.$$

Rezultă astfel aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Teoremă. *(proprietăţile fundamentale ale produsului scalar)*

P_1 $< x,x > \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^k; < x,x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*pozitivitatea produsului scalar*);
P_2 $< x,y >=< y,x >, \forall x,y \in \mathbb{R}^k$ *(simetria);*
P_3 $\lambda < x,y >=< \lambda x, y >, \forall x,y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (*omogenitatea în raport cu (prima) componentă)*;
P_4 $< x+y, z >=< x,z > + < y,z >, \forall x,y,z \in \mathbb{R}^k$ *(aditivitatea în raport cu (prima) componentă).*

Demonstraţie. P_1, P_2, P_3 rezultă imediat din definiţie;
$P_4 :< x + y, z >= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + ... + (x_k + y_k)z_k =$
$= (x_1z_1+x_2z_2+...+x_kz_k)+(y_1z_1+y_2z_2+...+y_kz_k) =< x, z > + < y, z >$.

Fie $|| \cdot ||$, norma euclidiană pe $\mathbb{R}^k$.

Teoremă. *Produsul scalar are, de asemenea, următoarele proprietăţi:*

$$\begin{aligned} P_5 \quad &< \quad x, x >= ||x||^2, \forall x \in \mathbb{R}^k; \\ P_6 \ | \quad &< \quad x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^k \ (\textit{inegalitatea lui Cauchy}); \\ P_7 \ | \quad &< \quad x, y > | \leq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Demonstraţie. $P_5 :< x, x >= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = ||x||^2$.
$P_6 : \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x - y||^2 =< \lambda x - y, \lambda x - y >= \lambda^2||x||^2 - 2\lambda < x, y > +||y||^2 \geq 0$, deci $\Delta' =< x, y >^2 -||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0$, de unde concluzia.
P_7 : Din P_6, avem $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y|| \leq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2)$ (s-a aplicat inegalitatea mediilor).

Observaţie. Din $P_6, |\frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||}| \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^k, x \neq 0, y \neq 0$. Există atunci şi este unic un unghi $\theta \in [0, \pi]$ astfel încât $\frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} = \cos\theta$, deci

$$< x, y >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta, \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

θ se numeşte *unghiul dintre vectorii x şi y*.

Definiţie. Spunem că *vectorii x* şi *y sunt perpendiculari* dacă $< x, y >= 0$. Notăm aceasta prin $x \perp y$.

Observaţie. Pentru $k = 2$, $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2$, iar

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1 = \\ &= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{||x|| \cdot ||y||} = \frac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||}, x \neq 0, y \neq 0, \end{aligned}$$

deci regăsim faptul că $< x, y >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Observaţie. Identitatea paralelogramului $(||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^k)$ poate fi acum demonstrată şi astfel:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 =< x + y, x + y > + < x - y, x - y >= 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Vecinătăţi ale unui punct într-un spaţiu metric.

Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare şi $x_0 \in X, r > 0$ $(r \in \mathbb{R})$ arbitrare, fixate. Definim

$$S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\},$$

numită *sfera deschisă (bila) de centru* x_0 *şi rază* r,

$$T(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) \leq r\},$$

numită *sfera închisă (discul) de centru* x_0 *şi rază* r.

Exemple (de sfere deschise/închise în diverse spaţii metrice).

I) În $(\mathbb{R}^k, d)$ (d metrica euclidiană), $d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, avem:

i) Dacă $k = 1$, atunci $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} (= (x_0 - r, x_0 + r)$, adică intervalul deschis centrat în x_0 şi de rază r, iar

$T(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$, adică intervalul închis centrat în x_0 şi de rază r.

ii) Pentru $k = 2$,

$$S(x_0, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r\} =$$

$= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2\} = int\mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)$,

iar $T(x_0, r) = [int\mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)] \cup \mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)$.

iii) Pentru $k = 3, S(x_0, r)$ devine chiar sfera centrată în x_0, de unde denumirile date noţiunilor introduse.

II) $(\mathbb{R}^2, d)$ (d metrica euclidiană), $S((0,0), 1), T((0,0), 1)$.

Când bilele nu sunt rotunde:

$(\mathbb{R}^2, d_1), d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$S((0,0), 1), T((0,0), 1)$;

$(\mathbb{R}^2, d_2)$, $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$S((0,0), 1), T((0,0), 1)$.

III) Dacă (X, d_0) este spaţiul metric discret, atunci $S(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r \leq 1 \\ X, r > 1 \end{cases}$,

iar $T(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r < 1 \\ X, r \geq 1 \end{cases}$.

Definiţie. O mulţime $V \subset (X, d)$ se numeşte *vecinătate a punctului* $x_0 \in X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

Notăm prin $\mathcal{V}(x_0)$, *sistemul* (*familia*) tuturor *vecinătăţilor punctului* x_0.

Teoremă (*Proprietăţi de bază ale sistemului de vecinătăţi)*

V_1) $x_0 \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$;

V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \forall U \supset V \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x_0)$ *(orice supramulţime a unei vecinătăţi a unui punct este de asemenea vecinătate a punctului)*;

V_3) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ *(intersecţia oricăror două vecinătăţi ale unui punct este de asemenea vecinătate a punctului)*;

V_4) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel încât* $\forall y \in W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstraţie. V_1) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$, de unde $x_0 \in V$.

V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$, deci $\forall U \supset V, S(x_0, r) \subset U$, de unde $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

V_3) $\forall V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r_1 > 0$ astfel încât $S(x_0, r_1) \subset V_1$. Analog, $\forall V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r_2 > 0$ astfel încât $S(x_0, r_2) \subset V_2$. Notând $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$, rezultă că $S(x_0, r_0) \subset S(x_0, r_1) \subset V_1$ şi $S(x_0, r_0) \subset S(x_0, r_2) \subset V_2$, deci $S(x_0, r_0) \subset V_1 \cap V_2$, ceea ce implică $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$.

V_4) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W = S(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$. Fie $y \in S(x_0, r)$, oarecare. Atunci $d(x_0, y) < r$, deci $r - d(x_0, y) \overset{\text{not.}}{=} r' > 0$. Arătăm că $S(y, r') \subset S(x_0, r) = W$ (deci va rezulta că $W \in \mathcal{V}(y)$). Într-adevăr, $\forall z \in S(y, r')$, rezultă că $z \in S(x_0, r)$ (deoarece $d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < r' + d(x_0, y) = r$).

Observaţie. Din V_4 rezultă că $S(x_0, r) \in \mathcal{V}(y), \forall y \in S(x_0, r)$ (orice sferă deschisă centrată într-un punct este vecinătate pentru orice punct al său).

Teoremă *(Proprietatea de separare Hausdorff)* $\forall x, y \in (X, d), x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y)$ *astfel încât* $V_x \cap V_y = \emptyset$ *(orice două puncte diferite dintr-un spaţiu metric* (X, d) *pot fi separate prin vecinătăţi disjuncte ale lor).*

Demonstraţie. Deoarece $x, y \in (X, d), x \neq y$, rezultă că $r = d(x, y) > 0$. Evident, $S(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{V}(x)$, iar $S(y, \frac{r}{2}) \in \mathcal{V}(y)$. Demonstrăm că $S(x, \frac{r}{2}) \cap S(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că $S(x, \frac{r}{2}) \cap S(y, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$, ar rezulta că există $z \in (X, d)$ astfel încât $z \in S(x, \frac{r}{2})$ şi $z \in S(y, \frac{r}{2})$. Prin urmare, $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, contradicţie.

Sisteme fundamentale de vecinătăţi.

Definiţie. Dat fiind $x_0 \in (X, d)$, o familie $\mathcal{U}(x_0)$ de părţi din (X, d) se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi (* sau *bază locală) pentru* x_0 dacă:

1) $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ şi

2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $U \subset V$.

Exemple. 1) $\mathcal{U}_1(x_0) = \{S(x_0, r)\}_{r>0}$ (mulţimea tuturor sferelor deschise cu centrul într-un punct $x_0 \in (X, d)$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0).

Într-adevăr, $\forall S(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$, deci $\mathcal{U}_1(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$. În plus, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, conform definiţiei, $\exists S(x_0, r) \in \mathcal{U}_1(x_0)$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

2) $\mathcal{U}_2(x_0) = \{S(x_0, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (într-un spaţiu metric (X, d), orice punct posedă un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi) - se mai spune că orice spaţiu metric satisface *axioma I a numărabilităţii* (*axioma* C_1).

(mulţimea tuturor sferelor deschise cu centrul într-un punct $x_0 \in (X, d)$ şi de rază $\frac{1}{n}, n \geq 1$, formează un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi pentru x_0).

Într-adevăr, $\forall n \geq 1, S(x_0, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(x_0)$, deci $\mathcal{U}_2(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$. În plus, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists S(x_0, r)$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$. Pe de altă parte, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa ca $\frac{1}{n_0} < r$, deci $\exists S(x_0, \frac{1}{n_0}) \in \mathcal{U}_2(x_0)$ astfel ca $S(x_0, \frac{1}{n_0}) \subset S(x_0, r) \subset V$.

Mulţimi deschise. Mulţimi închise (într-un spaţiu metric).

Definiţie. i) O *mulţime* $D \subset (X, d)$ se numeşte *deschisă* dacă fie este $\emptyset$, fie este vecinătate pentru orice punct al său.

Familia tuturor mulţimilor deschise din (X, d) se notează cu τ_d şi se numeşte *topologia indusă de metrica* d.

În particular, dacă $X = \mathbb{R}^k$ şi d este metrica euclidiană, atunci topologia indusă de d se numeşte *topologia uzuală (obişnuită) (naturală)* τ_0 pe $\mathbb{R}^k$.

ii) O *mulţime* $F \subset (X, d)$ se numeşte *închisă* dacă cF este mulţime deschisă.

Proprietăţi ale mulţimilor deschise/închise într-un spaţiu metric.

Propoziţie. i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este mulţime deschisă;

ii) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă;

iii) Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă;

iv) Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este mulţime închisă;

v) $X, \emptyset$ sunt mulţimi şi deschise şi închise.

Demonstraţie. i) Fie $(D_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulţimi deschise şi considerăm $D = \bigcup_{i \in I} D_i$.

Dacă $D = \emptyset$, atunci, conform definiţiei, D este deschisă.

Dacă $D \neq \emptyset$, atunci $\forall x \in D = \bigcup_{i \in I} D_i, \exists i_0 \in I$ astfel ca $x \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este deschisă, vom avea $D_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$. Dar $D_{i_0} \subset D$, deci conform cu V_2) obţinem că $D \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce antrenează în final că mulţimea D este deschisă.

ii) Fie D_1 şi D_2 mulţimi deschise oarecare. Arătăm că $D = D_1 \cap D_2$ este deschisă. Dacă $D = \emptyset$, afirmaţia este evidentă. Dacă $D \neq \emptyset$, atunci $\forall x \in D = D_1 \cap D_2$, rezultă că $x \in D_1$ şi $x \in D_2$, deci $D_1 \in \mathcal{V}(x), D_2 \in \mathcal{V}(x)$, de unde $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce înseamnă în final că mulţimea D este deschisă.

iii) şi iv) rezultă din i) şi ii) folosind relaţiile lui de Morgan.

v) evident.

Probleme propuse.

I. Fie $|| \cdot ||$, norma euclidiană pe $\mathbb{R}^k$.

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$ oarecare. Verificaţi următoarele echivalenţe:

i) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + y|| = ||x - y||$;

ii) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (generalizarea la $\mathbb{R}^k$ a Teoremei lui Pitagora);

iii) $< x + y, x - y >= 0 \Leftrightarrow ||x|| = ||y||$;

iv) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + ty|| \geq ||x||, \forall t \in \mathbb{R}$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$. Arătaţi că $< x, y >= \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2)$.

3. Fie $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$, unde cifra 1 este plasată pe locul $i, \forall i = \overline{1, k}$ ($e_1, e_2, ..., e_k$ sunt versorii bazei canonice în $\mathbb{R}^k$). Arătaţi că:

i) $x = \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i, \forall x \in \mathbb{R}^k$;

ii) $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i >^2, \forall x \in \mathbb{R}^k$ (egalitatea lui Parseval);

iii) $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i >< y, e_i >, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

II. 1. Arătaţi că există spaţii metrice în care are loc una dintre următoarele situaţii:

i) orice sferă deschisă este mulţime închisă.

ii) nici o sferă deschisă nu este mulţime închisă.

2. Arătaţi că mulţimile $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max(|x|, |y|) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în $\mathbb{R}^2$.

Aceeaşi problemă pentru mulţimile $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

3. Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat. Arătaţi că $T(x', r') \subseteq T(x, r) \Leftrightarrow ||x - x'|| \leq r - r'$. Este adevărată afirmaţia în cazul spaţiilor metrice arbitrare?

4. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Definim funcţia $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A). Arătaţi că $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \forall x, y \in X$.

5. Arătaţi că dacă $A, D \subset (X, || \cdot ||)$ şi mulţimea D este deschisă, atunci şi mulţimea $A + D = \{a + d; a \in A, d \in D\}$ (*suma mulţimilor* A şi D) este deschisă.

6. Arătaţi că orice interval deschis din $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_k, b_k)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1, k}$, este mulţime deschisă.

Exemple. i) Într-un spaţiu metric, orice sferă deschisă este vecinătate pentru orice punct al său, deci este mulţime deschisă (ceea ce justifică terminologia).

ii) Într-un spaţiu metric, fie $x_0 \in (X, d)$ şi $r > 0$ oarecare. Mulţimea $A = \{x \in X; d(x, x_0) > r\}$ este deschisă. Într-adevăr, $\forall x \in A$ (dacă $\exists$), $\exists r' = d(x, x_0) - r$ (> 0) astfel încât $S(x, r') \subseteq A : \forall z \in S(x, r'), d(z, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, z) > d(x, x_0) - r' = r$.

iii) Orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este închisă.

Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, să arătăm că cA este deschisă. Pentru aceasta, demonstrăm că $\forall y \in cA, \exists S(y, r) \subset cA$. Atunci $y \neq x_i, \forall i = \overline{1, n}$, deci $d(x_i, y) > 0, \forall i = \overline{1, n}$ şi fie $r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} d(x_i, y)$. $\forall z \in S(y, r)$, avem $d(y, z) < r < d(x_i, y), \forall i = \overline{1, n}$, deci $z \neq x_i, \forall i = \overline{1, n}$, ceea ce înseamnă că $z \in cA$.

iv) Orice sferă închisă $T(x_0, r)$ dintr-un spaţiu metric (X, d) este închisă (ceea ce justifică terminologia). Să arătăm deci că $cT(x_0, r)$ este deschisă, adică, $\forall y \in cT(x_0, r)$, $\exists S(y, r') \subset cT(x_0, r)$. Într-adevăr, deoarece $d(x_0, y) > r$, fie $r' = d(x_0, y) - r$. $\forall z \in S(y, r')$ satisface $d(x_0, z) \geq d(x_0, y) - d(y, z) > d(x_0, y) - r' = r$, de unde concluzia.

Propoziţie. Orice mulţime deschisă nevidă D dintr-un spaţiu metric (X, d) se poate reprezenta ca o reuniune de sfere deschise.

Demonstraţie. $\forall x \in D, \exists S(x, r_x) \subset D$, deci $D = \bigcup\limits_{x \in D} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in D} S(x, r_x) \subseteq D$, de unde $D = \bigcup\limits_{x \in D} S(x, r_x)$.

Observaţie. O intersecţie infinită de mulţimi deschise poate să nu fie deschisă: $X = \mathbb{R}, D_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sunt deschise, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \{0\}$ nu este deschisă.

Definiţie. Fie X o mulţime oarecare nevidă.

I) O familie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ se spune că este o *topologie* pe X dacă:

i) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \tau$;

ii) $\forall D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \in \tau$;

iii) $X, \emptyset \in \tau$.

II) Cuplul (X, τ) se numeşte *spaţiu topologic*.

Exemplu. i) Orice spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic (X, τ_d) (în raport cu topologia indusă de metrică) (τ_d este familia tuturor mulţimilor deschise din (X, d)).

ii) Fie (X, d_0) spaţiul metric discret. Deoarece $\forall x \in X, S(x, 1) = \{x\}$, rezultă că $\forall A \subset X, A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} = \bigcup\limits_{x \in A} S(x, 1)$, care este mulţime deschisă. Prin urmare, *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este deschisă*, ceea ce antrenează $\mathcal{P}(X) \subset \tau_{d_0}$. Deoarece incluziunea inversă are loc întotdeauna, rezultă că $\tau_{d_0} = \mathcal{P}(X)$.

Pe de altă parte, rezultă imediat şi că *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este închisă.*

Mulţimi mărginite.

Fie o mulţime nevidă $A \subset (X, d)$.

Definiţie. i) Numim *diametru* al mulţimii $A, \delta(A) = \sup\{d(x, y); x \in A, y \in A\}$ $(\in [0, \infty])$.

ii) Spunem că *mulţimea* A este *mărginită* dacă $\delta(A) < \infty$.

iii) Spunem că *mulţimea* A este *nemărginită* dacă $\delta(A) = \infty$.

Teoremă. *Fie* $A, B \subset (X, d), A, B \neq \emptyset$.

i) Dacă $A \subseteq B$, *atunci* $\delta(A) \leq \delta(B)$;

ii) $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{x_0\}$;

iii) $\delta(S(x_0, r)) \leq \delta(T(x_0, r)) \leq 2r$.

Demonstraţie. i) şi ii) sunt evidente din definiţia diametrului.

iii) $\forall x, y \in T(x_0, r)$, avem $d(x, x_0) \leq r$ şi $d(y, x_0) \leq r$, de unde $d(x, y) \leq 2r$, ceea ce implică $\delta(T(x_0, r)) = \sup\{d(x, y); x \in T(x_0, r), y \in T(x_0, r)\} \leq 2r$.

Teoremă. *O mulţime nevidă* $A \subset (X, d)$ *este mărginită dacă şi numai dacă* $\exists$ *o sferă deschisă care să o cuprindă:* $\exists r > 0$ *astfel încât* $A \subset S(x_0, r)$, $x_0 \in X$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Întrucât A este mărginită, $\delta(A) < \infty$.

Dacă $A = \{x_0\}$, problema este terminată.

Dacă $\exists x \neq x_0, x, x_0 \in A$, fie $r > 2\delta(A) (> 0)$. Arătăm că $A \subset S(x_0, r)$. Într-adevăr, $\forall z \in A$, avem $d(x_0, z) \leq d(x, x_0) + d(x, z) \leq 2\delta(A) < r$.

Suficienţa. Presupunem că $\exists r > 0$ astfel încât $A \subset S(x_0, r)$. Atunci $\delta(A) \leq \delta(S(x_0, r)) \leq 2r < \infty$.

Teoremă. *Fie* $(X, ||\cdot||)$ *un spaţiu normat. Atunci o mulţime nevidă* $A \subset (X, ||\cdot||)$ *este mărginită dacă şi numai dacă există o sferă deschisă centrată în origine care să o cuprindă, adică,* $\exists r > 0$ *astfel încât* $A \subset S(0, r)$ (0 este originea lui X).

Demonstraţie. *Suficienţa* este imediată.

Necesitatea. Întrucât mulţimea A este mărginită, $\exists r > 0$ astfel încât $A \subset S(x_0, r)$, $x_0 \in X$. Fie $r' = ||x_0|| + r$ (> 0). Este suficient să arătăm că $S(x_0, r) \subset S(0, r')$. Într-adevăr, $\forall z \in S(x_0, r)$, avem $||z|| \leq d(x_0, z) + ||x_0|| < r + ||x_0|| = r'$.

Puncte interioare. Interiorul unei mulţimi.

Fie $A \subset (X, d)$, o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct interior* mulţimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică $\exists r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset A$.

ii) Totalitatea punctelor interioare mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează prin $intA$ sau $\overset{\circ}{A}$.

Exemple. (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b)}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b)}} = (a,b), \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}} = \emptyset$;

iii) Dacă $A = (0,1]$, atunci $\frac{1}{2} \in \overset{\circ}{A}$, iar 0 şi $1 \notin \overset{\circ}{A}$;

iv) Fie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $\overset{\circ}{A} = \{(x,y); x^2 + y^2 < 4, x > y\}$.

Propoziţie. (*proprietăţi* ale interiorului unei mulţimi)

i) $\overset{\circ}{A} \subseteq A, \forall A \subset (X,d)$;

ii) $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X,d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X,d)$;

iv) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \forall A, B \subset (X,d)$;

Observaţie. Incluziunea poate fi strictă: $A = [0,1), B = [1,2], \overset{\circ}{A} = (0,1), \overset{\circ}{B} = (1,2), \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = (0,2) \supsetneq (0,1) \cup (1,2)$.

v) A este mulţime deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$;

vi) $\overset{\circ}{A} = \underset{D \in \tau_d, D \subset A}{\cup} D$ (interiorul unei mulţimi A este cea mai amplă mulţime (în sensul incluziunii) deschisă conţinută în A).

Demonstraţie. i) evident.

ii) $\forall x \in \overset{\circ}{A}$, rezultă că $A \in \mathcal{V}(x)$, deci pentru $\forall B \subset (X,d)$, cu $B \supseteq A$, avem $B \in \mathcal{V}(x)$, deci $x \in B$.

iii) Conform ii), $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A}$ şi $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{B}$, deci $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Pentru incluziunea inversă, $\forall x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, rezultă că $A \in \mathcal{V}(x)$ şi $B \in \mathcal{V}(x)$, deci $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce înseamnă că $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

iv) rezultă imediat din ii).

v) *Necesitatea.* Din i), $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Pentru incluziunea inversă, deoarece A este mulţime deschisă, rezultă că $\forall x \in A$, avem $A \in \mathcal{V}(x)$, adică $x \in \overset{\circ}{A}$, deci $A \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Suficienţa. Deoarece $A = \overset{\circ}{A}$, aceasta înseamnă că $\forall x \in A$, avem $x \in \overset{\circ}{A}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$, deci A este deschisă.

Puncte aderente. Aderenţa unei mulţimi.

Fie $A \subset (X, d)$ o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in (X, d)$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A dacă $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$.

ii) Totalitatea punctelor aderente mulţimii A se numeşte *aderenţa (sau închiderea)* lui A şi se notează prin $\overline{A}$ sau clA.

Definiţie. Spunem că:

i) mulţimea A este *densă* în (X, d) dacă $\overline{A} = X$.

ii) spaţiul (X, d) este *separabil* dacă $\exists A \subset X$ numărabilă, densă în X.

Teoremă *(de caracterizare folosind sistem fundamental de vecinătăţi) $x_0 \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, S(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $x_0 \in \overline{A}$, deoarece $\forall \varepsilon > 0, S(x_0, \varepsilon) \in \mathcal{V}(x_0)$, rezultă conform definiţiei că $S(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Suficienţa. $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $S(x_0, \varepsilon_0) \subset V$. Conform ipotezei, obţinem că $S(x_0, \varepsilon_0) \cap A \neq \emptyset$ şi întrucât $S(x_0, \varepsilon_0) \subset V$, rezultă cu atât mai mult că $V \cap A \neq \emptyset$.

Exemple (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $\overline{[a, b]} = \overline{(a, b]} = \overline{(a, b)} = \overline{[a, b)} = [a, b], \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

ii) $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (deci $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$). De altfel, de exemplu, în general, şi $\overline{\mathbb{Q}^k} = \mathbb{R}^k$ (deci $\mathbb{Q}^k$ este densă în $\mathbb{R}^k$). $\mathbb{R}^k$ este spaţiu separabil, $\forall k \geq 1$.

iii) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, mărginită, atunci $\sup A, \inf A \in \overline{A}$.

iv) Fie $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $\overline{A} = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

Teoremă (relaţiile (duale) de legătură între interior şi aderenţă).

i) $c(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{cA}}$ (complementara aderenţei este interiorul complementarei);

ii) $c(\overset{\circ}{A}) = \overline{cA}$ (complementara interiorului este aderenţa complementarei).

Demonstraţie. i) $x \in c(\overline{A}) \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ aşa ca $S(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ aşa ca $S(x, \varepsilon_0) \subset cA \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{cA}}$.

ii) analog sau $c(\overline{cA}) = \overset{\circ}{\widehat{ccA}} = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow c(\overset{\circ}{A}) = \overline{cA}$.

Propoziţie. (*proprietăţi* ale aderenţei unei mulţimi)

i) $A \subseteq \overline{A}, \forall A \subset (X, d)$;

ii) $\overline{A} \subseteq \overline{B}, \forall A, B \subset (X, d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A, B \subset (X, d)$;

iv) $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}, \forall A, B \subset (X, d)$;

v) A este mulţime închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$;

vi) $\overline{A} = \bigcap\limits_{cF\in\tau_d, F\supset A} F$ (aderenţa unei mulţimi A este cea mai mică mulţime (în sensul incluziunii) închisă care conţine A).

Demonstraţie. i) evident.

ii) $\forall x \in \overline{A}$, rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$, deci cu atât mai mult vom avea $V \cap B \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in \overline{B}$.

iii) $\overset{\circ}{\widehat{cA \cap cB}} = \overset{\circ}{\widehat{cA}} \cap \overset{\circ}{\widehat{cB}} \Leftrightarrow c(\overline{A \cup B}) = c\overset{\circ}{\widehat{(A \cup B)}} = c\overline{A} \cap c\overline{B} = c(\overline{A} \cup \overline{B})$, deci concluzia.

iv) este imediată din ii).

v) A este închisă dacă şi numai dacă cA este deschisă, adică $cA = \overset{\circ}{\widehat{cA}} = c\overline{A}$, de unde concluzia.

Propoziţie. Dacă $A \subset (X, d)$ este o mulţime nevidă mărginită, atunci $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

Demonstraţie. Evident, $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$. Pentru inegalitatea inversă, fie $x, y \in \overline{A}$, oarecare. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists z'_\varepsilon, z''_\varepsilon \in A$, încât $z'_\varepsilon \in S(x, \varepsilon)$ şi $z''_\varepsilon \in S(y, \varepsilon)$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0$, $d(x, y) < 2\varepsilon + d(z'_\varepsilon, z''_\varepsilon) \leq 2\varepsilon + \delta(A)$, deci $\forall x, y \in \overline{A}$, avem $d(x, y) \leq \delta(A)$, de unde $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$.

Frontiera unei mulţimi.

Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$.

Definiţie. Mulţimea $FrA = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} (= \overline{A} \cap \overline{cA})$ se numeşte *frontiera* lui A.

Teoremă. i) $\overset{\circ}{A} = A \backslash FrA$; ii) $\overline{A} = A \cup FrA$.

Demonstraţie. i) $A \backslash FrA = A \cap c(\overline{A} \cap c\overset{\circ}{A}) = A \cap [c\overline{A} \cup \overset{\circ}{A}] = (A \cap c\overline{A}) \cup (A \cap \overset{\circ}{A}) = (A \backslash \overline{A}) \cup \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

ii) $A \cup FrA = A \cup [\overline{A} \cap c\overset{\circ}{A}] = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup c\overset{\circ}{A}) = \overline{A} \cap X = \overline{A}$.

Propoziţie. i) FrA este mulţime închisă; ii) $FrA = Fr(cA)$.

Demonstraţie. i) rezultă imediat din definiţia frontierei, ca intersecţie de mulţimi închise.

ii) $FrA = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{cA} \cap \overline{A} = \overline{cA} \cap \overline{ccA} = Fr(cA)$.

Puncte de acumulare. Derivata unei mulţimi. Puncte izolate.

Fie $A \subset (X, d)$ o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in (X, d)$ se numeşte *punct de acumulare pentru mulţimea* A dacă $[V \backslash \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$.

Totalitatea punctelor de acumulare pentru mulţimea A se numeşte *mulţimea derivată* lui A şi se notează prin A'.

ii) Un punct $x_0 \in A$ care nu este punct de acumulare se numeşte *punct izolat*.

Prin urmare, $x_0 \in A$ este punct izolat dacă şi numai dacă $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0), V_0 \cap A = \{x_0\}$.

Teoremă *(de caracterizare cu sistem fundamental de vecinătăţi)* $x_0 \in A'$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, [S(x_0, \varepsilon) \backslash \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.

Exemple. (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $[a, b]' = (a, b]' = (a, b)' = [a, b)' = [a, b], \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

iii) Fie $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $A' = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

Propoziţie. *(proprietăţi* ale mulţimii derivate)

i) $A' \subseteq \overline{A}, \forall A \subset (X, d)$ (orice punct de acumulare este punct aderent);

ii) $A' \subseteq B', \forall A, B \subset (X, d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $(A \cup B)' = A' \cup B', \forall A, B \subset (X, d)$;

iv) $\overline{A} = A \cup A', \forall A \subset (X, d)$.

Demonstraţie. i) este evident.

ii) $\forall x \in A'$, rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(x), [V \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$, deci cu atât mai mult vom avea $[V \backslash \{x\}] \cap B \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in B'$.

iii) Datorită ii), obţinem imediat că $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Pentru incluziunea inversă, pentru $\forall x \in (A \cup B)'$ avem că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $[[S(x, \varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A] \cup [[S(x, \varepsilon) \backslash \{x\}] \cap B] \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $[S(x, \varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$ sau $[S(x, \varepsilon) \backslash \{x\}] \cap B \neq \emptyset$, adică, $x \in A' \cup B'$ (într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că $\exists S(x, \varepsilon_1)$ astfel ca $[S(x, \varepsilon_1) \backslash \{x_0\}] \cap A = \emptyset$ şi $\exists S(x, \varepsilon_2)$ astfel ca $[S(x, \varepsilon_2) \backslash \{x_0\}] \cap B = \emptyset$, atunci pentru $S(x, \varepsilon_0) = S(x, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$ se obţine imediat contradicţia).

iv) $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A}$, deci $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Pentru incluziunea inversă, fie $x \in \overline{A}$, oarecare. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup A'$. Dacă $x \notin A$, cum $x \in \overline{A}$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0, [S(x, \varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in A'$, deci $x \in A \cup A'$.

Probleme propuse.

I. (În $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$)

1. Arătaţi că:

i) $\overset{\circ}{\widehat{[a, b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a, b)}} = \overset{\circ}{\widehat{(a, b]}} = \overset{\circ}{\widehat{(a, b)}} = (a, b), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}} = \emptyset$;

iii) $\overline{[a,b]} = \overline{(a,b]} = \overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

iv) $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;

v) $[a,b]' = (a,b]' = (a,b)' = [a,b)' = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

vi) $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

2. Aflaţi interiorul, aderenţa, mulţimea derivată şi frontiera următoarelor mulţimi. Specificaţi pentru fiecare mulţime în parte dacă este deschisă, închisă, mărginită:
i) $A = [2,3) \cup \{4\} \cup (5,7)$;
ii) $A = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1); A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$;
iii) $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$;
iv) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$;
v) $A = \{(x,y); 0 < y < x + 1\}$;
vi) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \ge 3\}$;
vii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\}$;
viii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 2, x \ge y\}$;
ix) $A = \{(x,y); 0 \le y \le x + 1, x \le 2\}$;
x) $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Fie mulţimile $A = [0,1)$, $B = \{\frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{3} + (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n\}_{n\ge 1}$ şi $C = A \times B \subset \mathbb{R}^2$. Aflaţi $\overset{\circ}{A}, \overline{A}, A', FrA, \overset{\circ}{B}, \overline{B}, B', FrB, \overset{\circ}{C}, \overline{C}, C', FrC$.

4. Arătaţi că orice interval închis $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_k,b_k] \subset \mathbb{R}^k$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1,k}$, este mulţime închisă şi mărginită.

5. Arătaţi că în $\mathbb{R}^2$, diametrul sferei închise (discul) $T(x,r)$ este $2r$.

6. Arătaţi că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, mărginită, atunci $\sup A, \inf A \in \overline{A}$.

II. 1. Arătaţi că într-un spaţiu metric, o mulţime finită nu poate avea puncte de acumulare (deci mulţimea derivată este vidă).

2. Fie $(\mathbb{R}, d_0)$, d_0 metrica discretă. Aflaţi $\overline{A}$ pentru $A = (0,1)$ în topologia discretă τ_0. Comparaţi cu $\overline{A}$ în topologia uzuală τ_u.

3. Arătaţi că $A \subset (X,d), A \ne \emptyset$ este deschisă dacă şi numai dacă $A \cap FrA = \emptyset$ iar A este închisă dacă şi numai dacă $FrA \subset A$.

4. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset (X,d)$. Arătaţi că A este închisă dacă şi numai dacă $A' \subseteq A$.

5. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset (X,d), A \ne \emptyset$.
Definim funcţia $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} d(x,y), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A).
Arătaţi că:

i) $d(x,A)=0 \Leftrightarrow x\in \overline{A}$ (deci $\overline{A}=\{x\in X; d(x,A)=0\}$);

ii) Dacă $S(A,r)=\{x\in X; d(x,A)<r\}, T(A,r)=\{x\in X; d(x,A)\leq r\}, r>0$, atunci $\overline{A}=\bigcap\limits_{r>0} S(A,r)$.

6. Fie $A\subset (X,d), A\neq\emptyset$. Arătaţi că mulţimea A' este închisă.

7. Arătaţi că în orice spaţiu metric au loc:

i) orice mulţime închisă este G_δ (intersecţie numărabilă de mulţimi deschise);

ii) orice mulţime deschisă este F_σ(reuniune numărabilă de mulţimi închise).

8. Arătaţi că în orice spaţiu normat $(X,||\cdot||)$, $\overline{S(x_0,r)}=T(x_0,r)$, dar rezultatul nu se păstrează pentru spaţii metrice.

9. Fie $A\subset (X,d), A\neq\emptyset$. Arătaţi că:

i) $\overset{\circ}{A}=\bigcup\limits_{D\in\tau_d, D\subset A} D$;

ii) $\overline{A}=\bigcap\limits_{cF\in\tau_d, F\supset A} F$;

Dreapta reală încheiată, ca spaţiu metric

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (dreapta reală încheiată).
În raport cu distanţa euclidiană dată de modul,
$\cdot$ dacă $x_0 \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{V}(x_0)$ dacă $\exists (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.
$\cdot$ $V \in \mathcal{V}(-\infty)$ dacă $\exists [-\infty, a) \subset V$;
$\cdot$ $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ dacă $\exists (b, +\infty] \subset V$.

Observăm că nu putem defini în $\overline{\mathbb{R}}$ o distanţă cu ajutorul modulului, la fel cum se întâmpla în $\mathbb{R}$, deoarece, de exemplu, $d(+\infty, +\infty) = |+\infty - (+\infty)| = |\infty - \infty|$ nu are sens.

Fie atunci $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, x = \infty \\ -1, x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R} \end{cases}$ *(funcţia limitativă a lui Baire).*

f este o bijecţie, iar aplicaţia $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+, \overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ este o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ devine spaţiu metric.

Subspaţii ale unui spaţiu metric.

Fie un spaţiu metric (X, d) şi $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. $d_{/Y \times Y}$ este de asemenea o metrică, numită *metrica indusă de d pe Y.*

$(Y, d_{/Y \times Y})$ este spaţiu metric, *subspaţiu al spaţiului metric* (X, d).

Exemple. Fie $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica euclidiană d. $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.
În schimb, $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica discretă d_0 nu este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.

Teoremă. *Fie $Y \subset X$ un subspaţiu al spaţiului metric (X, d). O mulţime $M^* \subset Y$ este deschisă (respectiv, închisă) în Y dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă (respectiv, închisă) $M \subset X$ aşa ca $M^* = M \cap Y$.*

Teoremă. *Fie $Y \subset X$ un subspaţiu al spaţiului metric (X, d) şi fie $x \in Y$. O mulţime $V^* \subset Y$ este vecinătate a lui x în Y dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui x în X aşa ca $V^* = V \cap Y$.*

ŞIRURI DE PUNCTE ÎN SPAŢII METRICE

Fie (X,d) un spaţiu metric oarecare.

Definiţie. O aplicaţie $f:\mathbb{N}\to X, \forall n\in\mathbb{N}, f(n)\overset{\text{not.}}{=} x_n\in X$, se numeşte *şir de elemente din X*.

Definiţie. i) *(cu vecinătăţi)* Spunem că un şir $(x_n)_n\subset(X,d)$ *converge* (sau *este convergent*) la un element $a\in X$ dacă orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului de la un loc încolo, adică, $\forall V\in\mathcal{V}(a), \exists n_V\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n\geq n_V, x_n\in V$.

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n\to a$.

ii) Spunem că şirul $(x_n)_n\subset(X,d)$ *diverge* (sau *este divergent*) dacă nu este convergent.

Teoremă (de caracterizare). *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *(definiţia cu vecinătăţi);*

ii) (definiţia cu sfere) $\forall S(a,\varepsilon), \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\geq n_\varepsilon, x_n\in S(a,\varepsilon)$;

iii) (definiţia analitică) $\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\geq n_\varepsilon, d(x_n,a)<\varepsilon$, *adică, echivalent,* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a)=0$.

Demonstraţie. Evident, ii) $\Leftrightarrow$ iii).

i) $\Rightarrow$ ii): Se aplică i), ţinând seama că orice sferă deschisă centrată într-un punct este vecinătate a punctului respectiv.

ii) $\Rightarrow$ i): $\forall V\in\mathcal{V}(a), \exists S(a,\varepsilon)\subset V$ şi se foloseşte ii).

Observaţie. i) Orice şir constant este convergent.

ii) Prin adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni, un şir convergent rămâne convergent la aceeaşi limită, iar un şir divergent rămâne divergent.

Definiţie. Spunem că şirul $(x_n)_n\subset(X,d)$ este *mărginit* dacă mulţimea $\{x_n\}$ a termenilor săi este mărginită.

Definiţie. Fie $(x_n)_n\subset(X,d)$. Un şir $(y_n)_n\subset(X,d)$ se numeşte *subşir al şirului* $(x_n)_n$ dacă există un şir strict crescător de numere naturale $(n_k)_k$ astfel încât $y_k = x_{n_k}, \forall k\in\mathbb{N}$.

Observăm că $\forall k\in\mathbb{N}, n_k\geq k$.

Proprietăţi ale şirurilor convergente.

Teoremă. *(unicitatea limitei) Limita oricărui şir convergent dintr-un spaţiu metric* (X,d) *este unică.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_n\subset(X,d)$ un şir convergent. Presupunem prin reducere la absurd că există $a,b\in X, a\neq b$, astfel încât $x_n\to a$, $x_n\to b$. Conform proprietăţii de separare Hausdorff, există $V_a\in\mathcal{V}(a)$ şi $V_b\in\mathcal{V}(b)$ astfel

încât $V_a \cap V_b = \emptyset$. Deoarece $x_n \to a$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_1, x_n \in V_a$. Analog, deoarece $x_n \to b$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_2, x_n \in V_b$. Prin urmare, $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}, x_n \in V_a \cap V_b$, deci $V_a \cap V_b \neq \emptyset$, contradicţie.

Teoremă. *Orice şir convergent din (X, d) este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_n \subset (X, d)$ un şir convergent la un punct $a \in (X, d)$. Pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_1, d(x_n, a) < 1$.

Notăm cu $r = \max\{1, d(x_1, a), d(x_2, a), ..., d(x_{n_1 - 1}, a)\}$, deci $(x_n)_{n \geq 1} \subset S(a, r)$.

Teoremă. *Orice subşir $(x_{n_k})_k$ al unui şir convergent $(x_n)_n$ din (X, d) este convergent şi are aceeaşi limită ca $(x_n)_n$.*

Demonstraţie. Fie $a = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall k \geq k_0, d(x_k, a) < \varepsilon$. Dar $\forall k \geq k_0, n_k \geq k \geq k_0$, deci $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $x_{n_k} \to a$.

Caracterizări ale unor elemente topologice cu ajutorul şirurilor.

Deoarece, aşa cum s-a văzut, orice punct a dintr-un spaţiu metric (X, d) admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi $\mathcal{U} = \{S(a, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, vom da în cele ce urmează caracterizări cu ajutorul şirurilor, ale punctelor aderente/de acumulare, respectiv ale mulţimilor închise:

Teoremă. *Fie $A \subset (X, d)$ o mulţime oarecare, nevidă.*

i) $a \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă $\exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$.

ii) $a \in A'$ dacă şi numai dacă $\exists (x_n)_n \subset A \backslash \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$.

iii) Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $\forall (x_n)_n \subset A$, cu $x_n \to a$, rezultă că $a \in A$.

Demonstraţie. i) *Necesitatea.* Dacă $a \in \overline{A}$, atunci $\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset$.

În particular, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pentru $V = S(a, \frac{1}{n}), S(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, deci, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \in S(a, \frac{1}{n})$, adică, echivalent, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, ceea ce implică $x_n \to a$.

Suficienţa. Presupunem acum că există $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$. Fie $V \in \mathcal{V}(a)$ o vecinătate arbitrară. Deoarece $x_n \to a$, conform definiţiei cu vecinătăţi, există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V, x_n \in V$. Prin urmare, $V \cap A \neq \emptyset$, deci $a \in \overline{A}$.

ii) rezultă imediat din i).

iii) *Necesitatea.* Dacă A este închisă, atunci $A = \overline{A}$. Fie $(x_n)_n \subset A$ convergent la un punct a. Atunci, conform punctului i), $a \in \overline{A} = A$.

Suficienţa. Presupunem că orice şir convergent din A are limita în A. Pe de o parte $A \subseteq \overline{A}$, iar pe de altă parte, $\forall a \in \overline{A}$, conform punctului i), $\exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$. Dar atunci, conform presupunerii, obţinem că $a \in A$, deci $\overline{A} \subseteq A$. Prin urmare, în final, $\overline{A} = A$, adică A este închisă.

Spaţii metrice complete.

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_n \subset (X, d)$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

sau, echivalent,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Teoremă. *Orice şir convergent $(x_n)_n$ este Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon, d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Teoremă. *Orice şir Cauchy $(x_n)_n$ este mărginit.*

Demonstraţie. Întrucât şirul $(x_n)_n$ este Cauchy, pentru $\varepsilon = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_1, d(x_n, x_m) < 1$. În particular, $d(x_n, x_{n_1}) < 1, \forall n \geq n_1$. Fie $r = \max\{1, d(x_1, x_{n_1}), d(x_2, x_{n_1}), ..., d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\}$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1} \subset S(x_{n_1}, r)$.

Definiţie. Un *spaţiu metric* (X, d) se spune că este *complet* dacă orice şir Cauchy este convergent (altfel spus, noţiunile de şir Cauchy şi şir convergent coincid).

Problematica în $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ (cu metrica euclidiană indusă de norma euclidiană).

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$. Atunci
$x_1 = (x_1^1, x_1^2, ..., x_1^k)$,
$x_2 = (x_2^1, x_2^2, ..., x_2^k)$,
...,
$x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k)$,
....
$(x_n^i)_n \subset \mathbb{R}, i = \overline{1,k}$ se numesc *şiruri de coordonate.*

Teoremă *(convergenţa în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent (în $\mathbb{R}^k$) la $a = (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $x_n^i \to a_i$ (în $\mathbb{R}$), $\forall i = \overline{1,k}$.*

Demonstraţie. Vom folosi următoarea dublă inegalitate:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1,k}, |x_n^i - a_i| \leq ||x_n - a|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i - a_i|.$$

Necesitatea. Dacă $x_n \to a$, atunci $||x_n - a|| \to 0$, de unde $x_n^i \to a_i, \forall i = \overline{1,k}$.

Suficienţa. Dacă $x_n^i \to a_i, \forall i = \overline{1,k}$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n^i - a_i| \to 0$, de unde $||x_n - a|| \to 0$, ceea ce înseamnă că $x_n \to a$.

Exemplu. Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3$, de termen general $x_n = (\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}, n \sin \frac{1}{n}, \frac{\sin^3 n}{\ln n}), \forall n \geq 2$, este convergent în $\mathbb{R}^3$, cu limita vectorul $(1, 1, 0)$.

Observaţie. Un rezultat analog are loc în general pentru spaţiul metric produs al k spaţii metrice oarecare.

Teoremă *(proprietatea Cauchy în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este Cauchy în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $(x_n^i)_n$ este Cauchy în $\mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}$.*

Demonstraţie. Se raţionează ca la teorema anterioară, ţinând seama că

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1,k}, |x_n^i - x_m^i| \leq ||x_n - x_m|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_m^i|.$$

Teoremă *(mărginirea în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este mărginit în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $(x_n^i)_n$ este mărginit în $\mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}$.*

Demonstraţie. Se raţionează asemănător, ţinând seama că

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1,k}, |x_n^i| \leq ||x_n|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i|.$$

Teoremă *(caracterizarea Cauchy). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy* (deci $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană este spaţiu metric complet).

Demonstraţie. Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $\forall i = \overline{1,k}, (x_n^i)_n \subset \mathbb{R}$ este convergent, adică, echivalent, Cauchy în $\mathbb{R}$, ceea ce echivalează cu faptul că $(x_n)_n$ este Cauchy în $\mathbb{R}^k$.

Teoremă. *(Cesaro). Orice şir mărginit din $\mathbb{R}^k$ are subşiruri convergente.*

Demonstraţie. Pentru simplificarea scrierii, vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că $k = 2$.

Fie deci $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2)_n \subset \mathbb{R}^2$ un şir mărginit. Rezultă că $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n \subset \mathbb{R}$ sunt de asemenea mărginite. Lema lui Cesaro aplicată lui $(x_n^1)_n$ antrenează existenţa unui subşir $(x_{n_k}^1)_k$ al său convergent. Aplicând din nou Lema lui Cesaro pentru şirul mărginit $(x_{n_k}^2)_k$, rezultă că există un subşir $(x_{n_{k_p}}^2)_p$ al său convergent. Prin urmare, există subşirul convergent $(x_{n_{k_p}}^1, x_{n_{k_p}}^2)_p$ al şirului $(x_n)_n$.

Teoremă. *Dacă în $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană, $x_n \to a$, atunci $||x_n|| \to ||a||$.*

Demonstraţie. Avem: $|||x_n|| - ||a||| \leq ||x_n - a||, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x_n \to a$, avem $||x_n - a|| \to 0$, şi, conform criteriului majorării, $|||x_n|| - ||a||| \to 0$, adică $||x_n|| \to ||a||$.

Observaţie. Din teorema anterioară rezultă că în $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană, dacă un şir este convergent, atunci şirul normelor este de asemenea convergent. Reciproca nu este în general adevărată. Exemplul următor arată că există şi şiruri divergente pentru care şirul normelor converge:

Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \frac{1+(-1)^n}{2}), \forall n \geq 1$, este divergent, dar şirul $(||x_n||)_n$ este convergent.

Teoremă. *Într-un spaţiu metric complet* (X, d)*, subspaţiile închise coincid cu cele complete.*

Demonstraţie. Fie o mulţime oarecare $A \subset (X, d)$.

Necesitatea. Presupunem că A este închisă şi fie $(x_n)_n \subset A$ un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_n$ este de asemenea şir Cauchy în X, deci converge la $a \in X$. Prin urmare, $a \in \overline{A} = A$, ceea ce înseamnă în final că $(x_n)_n$ converge în A, deci A este subspaţiu complet.

Suficienţa. Presupunem că A este subspaţiu complet şi arătăm că este mulţime închisă, adică, echivalent, $\overline{A} \subseteq A$. Fie deci $y \in \overline{A}$, oarecare. Există atunci $(x_n)_n \subset A$, cu $x_n \to y$. Prin urmare, $(x_n)_n$ este şir Cauchy în A care este din ipoteză subspaţiu complet, deci $x_n \to z \in A$. În consecinţă, $y = z \in A$.

Exemple. i) Subspaţiul $[a, b] \subset (\mathbb{R}, d_u)$ este complet $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

ii) $(-\infty, a), (b, +\infty) \subset (\mathbb{R}, d_u)$ nu sunt spaţii metrice complete $(a, b \in \mathbb{R})$.

iii) Subspaţiul $\mathbb{Q}^k \subset (\mathbb{R}^k, d_u)$ $(k \geq 1)$ nu este complet (nu este închis).

Teoremă. *Pentru orice spaţiu metric, există un spaţiu metric complet care să îl conţină ca subspaţiu.*

Teoremă (Cantor) (de caracterizare a spaţiilor metrice complete). *Un spaţiu metric* (X, d) *este complet dacă şi numai dacă* $\forall (F_n)_n$ *un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$*, avem* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $(F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \emptyset$, rezultă că $\exists x_n \in F_n$. Deoarece $F_n \supseteq F_{n+p}, \forall p \in \mathbb{N}$, avem $d(x_n, x_{n+p}) \leq \delta(F_n), \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(x_n)_n$ este Cauchy în spaţiul metric complet (X, d), deci există $x \in X$ aşa ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Vom arăta că $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\}$.

Probleme propuse

I. (În $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană)

1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:

i) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = (\frac{\sin n}{n}, n\sin\frac{1}{n}, \sqrt[n]{n+1}), \forall n \geq 2$;

ii) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^4, x_n = (\frac{1}{1^3+2}+\frac{1}{2^3+2}+...+\frac{1}{n^3+2}, \frac{1}{2}+\frac{-1}{3}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}, (\frac{1}{-3})^n, n(\frac{1}{4})^n), \forall n \geq 1$.

iii) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}), \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}), \forall n \geq 1$.

2. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = ((1+\frac{1}{n})^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin n), \forall n \geq 2$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ să fie la distanţă minimă în $\mathbb{R}^3$ faţă de punctul $a = (1, e^{-\lambda}, \pi)$.

3. Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi limita şirului $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^4, x_n = ((\cos\frac{a}{n^2})^{n^2}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}), \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n(2^{\arcsin\frac{\pi}{3n}}-1)), \forall n \geq 2, a \in \mathbb{R}$ fiind arbitrar, fixat.

4. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (2n\sin\frac{1}{n}, \frac{\ln n}{n}), \forall n \geq 2$. Arătaţi că sfera $S((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$ poate conţine doar un număr finit de termeni ai şirului.

5. Fie $A, D \subset \mathbb{R}^k$. Arătaţi că dacă mulţimea D este deschisă, atunci $D+A = D+\overline{A}$. Arătaţi că ipoteza asupra mulţimii D este esenţială.

6. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = ((-1)^n\frac{n+1}{n+2}, 3^n(2^{\frac{1}{n}}-1), \cos\frac{n\pi}{2}), \forall n \geq 1$. Precizaţi dacă şirul este convergent. Studiaţi apoi mărginirea şirului.

7. Fie mulţimea $A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 9, y \geq x+1\}$. Arătaţi cu ajutorul caracterizării cu şiruri că mulţimea A este închisă. Este mulţimea $B = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 9, y > x+1\}$ închisă?

8. Cercetaţi dacă mulţimea $A = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este mărginită. Este închisă?

9. (Teorema lui Cauchy-Bolzano) Arătaţi că *orice mulţime mărginită şi infinită din* $\mathbb{R}^k$ are *cel puţin un punct de acumulare.*

10. *(caracterizări cu şiruri ale noţiunilor de interior/mulţime deschisă)*

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime oarecare nevidă. Arătaţi că un punct $x \in \mathring{A}$ dacă şi numai dacă $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in A$.

Deduceţi de aici că o mulţime nevidă D este deschisă dacă şi numai dacă $\forall x \in D$ şi $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in D$.

II. 1. Arătaţi că dacă un şir Cauchy $(x_n)_n \subset (X,d)$ conţine un subşir convergent la un punct $x \in X$, atunci $x_n \to x$.

2. Arătaţi că orice spaţiu metric finit este complet.

3. Arătaţi că orice spaţiu metric discret este complet.

4. Fie $d: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, d(m,n) = \begin{cases} 0, m = n \\ 1+\frac{1}{m+n}, m \neq n \end{cases}, \forall m,n \in \mathbb{N}$.

Arătaţi că $(\mathbb{N}, d)$ este spaţiu metric complet.

5. Pe $\mathbb{R}_+$ se introduce metrica $d(x,y) = \begin{cases} x+y, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.
Arătaţi că $(\mathbb{R}_+, d)$ este spaţiu metric complet.

6. Arătaţi că dacă $(X_i, d_i), i = \overline{1,k}$ sunt k spaţii metrice oarecare şi considerăm spaţiul metric produs $(X, d), X = X_1 \times ... \times X_k, d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)}, \forall x, y \in X$, atunci un şir $(x_n)_n \subset (X, d), x_n = (x_n^1, ..., x_n^k), \forall n \in \mathbb{N}, (x_n^i)_n \subset X_i, \forall i = \overline{1,k}$, converge (în (X, d)) la $a = (a_1, ..., a_k), a_i \in X_i, \forall i = \overline{1,k} \Leftrightarrow (x_n^i)_n$ converge la a_i (în $(X_i, d_i)), \forall i = \overline{1,k}$.

7. Fie $d : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+, d(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.
Arătaţi că $(\mathbb{N}^*, d)$ este spaţiu metric care nu este complet.

8. Arătaţi că $(0, 1]$ privit ca subspaţiu al spaţiului $(\mathbb{R}, d_u)$ nu este spaţiu metric complet, dar înzestrat cu metrica discretă este spaţiu metric complet.

9. Arătaţi că dacă:
i) $(x_n)_n, (y_n)_n$ sunt şiruri convergente într-un spaţiu metric (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))_n$ este şir convergent în $(\mathbb{R}, d_u)$.
ii) $(x_n)_n, (y_n)_n$ sunt şiruri Cauchy într-un spaţiu metric (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))_n$ este şir Cauchy în $(\mathbb{R}, d_u)$.

Teoremă (Cantor) (de caracterizare a spaţiilor metrice complete). *Un spaţiu metric* (X, d) *este complet dacă şi numai dacă* $\forall (F_n)_n$ *un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, *avem* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $(F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \emptyset$, rezultă că $\exists x_n \in F_n$. În cursul anterior, am demonstrat că şirul $(x_n)_n$ este Cauchy în spaţiul metric complet (X, d), deci există $x \in X$ aşa ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Vom arăta că $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\} \subseteq F_n$, deci $\overline{A_n} \subseteq \overline{F_n} = F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x_n \to x$, rezultă că şi $x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ... \to x$, deci $x \in \overline{A_n} \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

De altfel, remarcăm că mulţimile F_n pot avea în comun doar un punct deoarece dacă ar exista $y \neq x$ aşa ca $y \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, am avea $0 < d(x, y) \leq \delta(F_n) \to 0$, deci $d(x, y) = 0$, contradicţie.

Suficienţa. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy oarecare în (X, d). $\forall n \in \mathbb{N}$, notăm $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\}$ şi $F_n = \overline{A_n}$. Atunci $(F_n)_n$ este un şir descendent de mulţimi nevide, închise.

Deoarece $(x_n)_n$ este Cauchy, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m, n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $\delta(F_n) \leq \delta(F_{n_0}) = \delta(A_{n_0}) = \sup\limits_{m,n\geq n_0} d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$, ceea ce antrenează că $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, deci din ipoteză $\exists x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, deci (X, d) este complet.

Spaţii Banach.

Definiţie. Spunem că un spaţiu normat $(X, ||\cdot||)$ este *spaţiu Banach* dacă este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă.

Observaţie. Aşa acum am remarcat deja, $\mathbb{R}^k, k \geq 1$, cu norma euclidiană este spaţiu Banach.

Alte exemple de spaţii Banach.

I) $(\mathcal{B}(A), ||\cdot||)$ este spaţiu Banach ($(\mathcal{B}(A), +, \cdot)$ este spaţiu liniar normat),

$$d(f, g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A),$$

distanţa indusă de norma uniformă

$$||f|| = \sup_{x\in A} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{B}(A).$$

Într-adevăr, fie $(f_n)_n \subset \mathcal{B}(A)$ un şir Cauchy oarecare în $(\mathcal{B}(A), d)$. Trebuie să arătăm că există $f \in \mathcal{B}(A)$ astfel ca $f_n \overset{\mathcal{B}(A)}{\to} f$. Întrucât $(f_n)_n$ este şir Cauchy,

pentru orice $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_0, d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce înseamnă că pentru orice $x \in A$,

$$(*)\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci $\forall x \in A, (f_n(x))_n$ este şir numeric Cauchy, deci convergent. Prin urmare, $\forall x \in A, \exists f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Astfel, este bine definită o funcţie f. Arătăm că $f \in \mathcal{B}(A)$ şi $f_n \overset{\mathcal{B}(A)}{\to} f$.

În $(*)$ facem $m \to \infty$ şi rezultă că

$$(**)\ \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall x \in A$$

(rezultă astfel că şirul $(f_n)_n$ converge uniform pe A - de aceea terminologia de norma convergenţei uniforme).

Prin urmare,

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in A.$$

Pe de altă parte, întrucât $f_{n_0} \in \mathcal{B}(A), \exists M > 0$ aşa ca $|f_{n_0}(x)| \leq M, \forall x \in A$. De aici, $|f(x)| \leq M + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in A$, deci $f \in \mathcal{B}(A)$.

Trecând în $(**)$ la supremum, rezultă că

$$\forall n \geq n_0, d(f_n, f) = ||f_n - f|| = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de unde $f_n \overset{\mathcal{B}(A)}{\to} f$.

II) $(l^2, +, \cdot)$ este spaţiu Banach, cu metrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$$

indusă de norma

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}, \forall x = (x_n)_n \in l^2.$$

Într-adevăr, $\forall (x^k)_k$ şir Cauchy în l^2, să arătăm că este convergent în l^2 $x \in l^2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât $\forall k, l \geq k_\varepsilon, ||x^k - x^l|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n^l)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$(*) |x_n^k - x_n^l|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n^l)^2 < (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall n \geq 1.$$

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât $\forall k, l \geq k_\varepsilon, |x_n^k - x_n^l| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq 1$, ceea ce înseamnă că pentru $\forall n \geq 1$, şirul $(x_n^k)_k$ este Cauchy, deci convergent (în $\mathbb{R}$). Pentru $\forall n \geq 1$, fie atunci $x_n = \lim\limits_{k \to \infty} x_n^k$ şi fie $x = (x_n)_n$.

Arătăm că $x^k \stackrel{l^2}{\to} x \in l^2$. Într-adevăr, din $(*)$, $\sum\limits_{n=1}^{p} (x_n^k - x_n^l)^2 < (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall p \geq 1$. Facem $l \to \infty$ şi obţinem $\sum\limits_{n=1}^{p} (x_n^k - x_n)^2 \leq (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall p \geq 1$, de unde, făcând $p \to \infty$,

$$(**) \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n)^2 \leq (\frac{\varepsilon}{2})^2,$$

ceea ce înseamnă că $x^k - x \in l^2$, deci $x = x^k - (x^k - x) \in l^2$.

În plus, din $(**)$, $||x^k - x|| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geq k_\varepsilon$, deci $x^k \stackrel{l^2}{\to} x \in l^2$.

FUNCŢII ÎNTRE SPAŢII METRICE

LIMITA UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2), a \in D'$ (deci ne putem apropia oricât de mult de a prin şiruri de elemente din D).

Definiţie. *(cu vecinătăţi)* Spunem că *funcţia f are limita $l \in Y$ în punctul* $a \in D'$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D \backslash \{a\}, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D \backslash \{a\}) \subseteq V$).

(cu alte cuvinte, o funcţie f are limită l într-un punct $a \in D'$ dacă de îndată ce se consideră puncte $x \in D \backslash \{a\}$ *suficient* de apropiate de a, $f(x)$ se apropie *oricât* de mult de l).

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (sau $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$).

Teoremă *(unicitatea limitei). Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $l_1, l_2 \in Y, l_1 \neq l_2$ astfel încât $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2$. Datorită proprietăţii de separare Hausdorff, există $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Folosind definiţia cu vecinătăţi, $\exists U_1 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_1 \cap D \backslash \{a\}, f(x) \in V_1$ şi $\exists U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_2 \cap D \backslash \{a\}, f(x) \in V_2$. Prin urmare, $\exists U_0 = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_0 \cap D \backslash \{a\}, f(x) \in V_1 \cap V_2$, deci $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, contradicţie.

Teoremă. *(de caracterizare a noţiunii de limită) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *(definiţia cu vecinătăţi);*

ii) (definiţia cu sfere) $\forall S_Y(l,\varepsilon), \exists S_X(a,\delta)$ *astfel încât* $\forall x \in S_X(a,\delta) \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$;

iii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in D\backslash\{a\}$*, cu* $d_1(x,a) < \delta$*, avem* $d_2(f(x),l) < \varepsilon$;

iv) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} l$.

Demonstraţie. Se observă imediat că $ii) \Leftrightarrow iii)$.

$i) \Rightarrow ii)$: Fie $S_Y(l,\varepsilon)$ oarecare. Deoarece $S_Y(l,\varepsilon) \in \mathcal{V}(l)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$. Întrucât $U \in \mathcal{V}(a), \exists S_X(a,\delta) \subset U$.

Prin urmare, $\forall x \in S_X(a,\delta) \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Fie $(x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \xrightarrow{X} a$ oarecare şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Din ipoteză, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in D\backslash\{a\}$, cu $d_1(x,a) < \delta$, avem $d_2(f(x),l) < \varepsilon$.

Deoarece $x_n \to a$, pentru $\delta(\varepsilon) > 0, \exists n_0(\delta(\varepsilon)) = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, d_1(x_n,a) < \delta$, ceea ce antrenează $d_2(f(x_n),l) < \varepsilon$.

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0$, $d_2(f(x_n),l) < \varepsilon$, ceea ce exprimă faptul că $f(x_n) \xrightarrow{Y} l$.

$iv) \Rightarrow i)$: Presupunem prin reducere la absurd că $\exists V_0 \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât $\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $f(U \cap D\backslash\{a\}) \nsubseteq V_0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie în particular $U_n = S_X(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(a)$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(S_X(a,\frac{1}{n}) \cap D\backslash\{a\}) \nsubseteq V_0$, adică, $\forall n \geq 1, \exists x_n \in S_X(a,\frac{1}{n}) \cap D\backslash\{a\}$, cu $f(x_n) \notin V_0, \forall n \geq 1$.

Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in S_X(a,\frac{1}{n})$, rezultă că $d_1(x_n,a) < \frac{1}{n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ceea ce antrenează conform presupunerii făcute că $f(x_n) \xrightarrow{Y} l$. Cum $V_0 \in \mathcal{V}(l)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, f(x_n) \in V_0$, contradicţie.

Consecinţă. În general, pentru a arăta că o funcţie nu are limită într-un punct, se construiesc două şiruri care tind la punctul respectiv, pentru care şirurile imaginilor au limite diferite.

Exemple. i) Fie $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Observăm că $(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})' = \mathbb{R}^2$, deci are sens să ne punem problema existenţei limitei funcţiei în orice punct din $\mathbb{R}^2$.

Vom arăta că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Conform procedeului indicat mai sus, construim:

$((x_n,y_n))_n, ((x'_n,y'_n))_n \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, (x_n,y_n) = (\frac{1}{n},0), (x'_n,y'_n) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n}), \forall n$.

Observăm că $(x_n,y_n) \to (0,0), (x'_n,y'_n) \to (0,0)$, dar $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0 \to 0, f(x'_n,y'_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ şi $0 \neq \frac{1}{2}$. Prin urmare, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pe de altă parte, remarcăm că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \forall (x_0,y_0) \neq (0,0)$.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} y = 0$ ($\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \in [-1,1], y \to 0$).

Teoremă. *(caracterizare de tip Cauchy) Fie* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2), a \in D', (Y, d_2)$ *spaţiu metric complet. Atunci* f *are limită în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x, y \in D \backslash \{a\}$, *cu* $d_1(x,a) < \delta$ *şi* $d_1(y,a) < \delta$ *avem* $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (adică, de îndată ce x şi y sunt suficient de aproape de a, $f(x)$ şi $f(y)$ sunt oricât de apropiate).

(se poate astfel demonstra existenţa limitei unei funcţii într-un punct fără a cunoaşte efectiv limita).

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in D \backslash \{a\}$, cu $d_1(x,a) < \delta$ şi $d_1(y,a) < \delta$, avem $d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $d_2(f(y), l) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Suficienţa. Dacă are loc condiţia $(*)$, fie $(x_n)_n \subset D \backslash \{a\}, x_n \overset{X}{\to} a$, oarecare. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există atunci $n_0(\delta(\varepsilon)) = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m, n \geq n_0, d_1(x_n, a) < \delta$ şi $d_1(x_m, a) < \delta$. Prin urmare, conform presupunerii făcute, $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $(f(x_n))_n$ este şir Cauchy, deci convergent în (Y, d_2).

Să arătăm acum că limita lui $(f(x_n))_n$ este aceeaşi, indiferent de şirul $(x_n)_n \subset D \backslash \{a\}, x_n \to a$ considerat. Pentru aceasta, fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset D \backslash \{a\}, x_n \to a, y_n \to a$. Construim şirul intercalat $(z_n)_n \subset D \backslash \{a\}$ definit astfel:

$$z_n = \begin{cases} x_n, n = 2k \\ y_n, n = 2k+1. \end{cases}$$

Atunci $z_n \to a$, deci, conform primei părţi, $f(z_n) \to l$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = l$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Observaţie. i) Dacă operăm cu funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$, putem vorbi de *limita la stânga* (respectiv, *la dreapta*) *a lui* f *într-un punct* $a \in D'$, considerând doar punctele $x \in D$ situate strict la stânga (respectiv, la dreapta) lui a (o vom nota prin $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$ (respectiv, $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$)).

ii) Deoarece $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spaţiu metric, teoria limitei unei funcţii într-un punct se aplică şi pentru funcţii cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$.

Problematica în $\mathbb{R}^k$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie vectorială. Prin urmare,
$\forall x \in D, f(x) = (f_1, f_2, ..., f_q)(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$
$= (f_1(x_1, x_2, ..., x_p), f_2(x_1, x_2, ..., x_p), ..., f_q(x_1, x_2, ..., x_p))$,
unde $f_i : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, q}$ se numesc *funcţiile de coordonate ale lui* f.

Teoremă. *(caracterizarea pe componente) O funcţie* $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ *are limita* $l = (l_1, l_2, ..., l_q) \in \mathbb{R}^q$ *în punctul* $x_0 \in D'$ *dacă şi numai dacă fiecare componentă* f_i *are limita* l_i *în punctul* x_0 :
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, ..., l_q) \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, q}, \lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i.$

Demonstraţie. Rezultatul este imediat conform caracterizării cu şiruri a existenţei limitei unei funcţii într-un punct şi folosind faptul că în $\mathbb{R}^k$ convergenţa unui şir echivalează cu convergenţa tuturor şirurilor de coordonate.

Operaţii cu funcţii care au limită.

1) Fie $f, g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D'$ şi $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^q$. Definim
$f + g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$.

Demonstraţie. $\forall (x_n)_n \subset D \backslash \{x_0\}, x_n \to x_0$, avem $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$.

2) Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ şi $g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$fg : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (fg)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^q}, \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l_1 \cdot l_2$.

3) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$\lambda f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$.

4) Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^*$ şi $g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$\frac{g}{f} : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, \frac{g}{f}(x) = \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^q}, \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (\frac{g}{f})(x) = \frac{l_2}{l_1}$.

5) **Propoziţie**. Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D'$. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} ||f(x)|| = ||l||$ ($|| \cdot ||$ este norma euclidiană).

Demonstraţie. Se poate folosi caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct sau faptul că $||f(x)-l|| \geq |||f(x)||-||l|||$.

Probleme propuse.

1. Fie $f(x,y) = arctg\frac{y}{x^2}$.
i) Aflaţi mulţimea de definiţie $D \subset \mathbb{R}^2$ a funcţiei f;
ii) Determinaţi D';
iii) Cercetaţi dacă există limita funcţiei f în punctele din D'.

2. Cercetaţi existenţa limitelor următoare şi, în caz afirmativ, calculaţi limita corespunzătoare: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{1}{x^2+y^2})^{x^2y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$.

3. Folosind definiţia cu $\varepsilon-\delta$, arătaţi că:
i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x^2+xy) = 4$;
ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$;
iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\sqrt{2})} \frac{x+1}{y^2} = \frac{1}{2}$;
iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1}{3}$.

4. Cercetaţi existenţa limitei în $(0,0)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{x^2+y^2}), \forall(x,y) \neq (0,0)$.

5. Calculaţi $\lim\limits_{x\to0} f(x), f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, f(x) = (\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}, \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x})$,
$a,b \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}, \alpha,\beta > 0, m,n \in \mathbb{N}^*, m,n \geq 2$.

Semnul local al unei funcţii care are limită.

Propoziţie. Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}, x_0 \in D'$. Presupunem că $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$. Atunci f are <u>local</u> semnul lui l, adică, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $sgn f(x) = sgn l, \forall x \in U_0 \cap D\backslash\{x_0\}$.

Demonstraţie. Deoarece $l \neq 0$, folosind condiţia $\varepsilon - \delta$, cu $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$, rezultă că $\exists\delta > 0$ astfel încât $\forall x \in D\backslash\{x_0\}$, cu $d(x, x_0) < \delta$, avem $|f(x)-l| < \varepsilon$, deci $\forall x \in S(x_0, \delta) \cap D\backslash\{x_0\}, l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$.

Dacă $l > 0$, atunci $f(x) > \frac{l}{2} > 0$, iar dacă $l < 0$, atunci $f(x) < \frac{l}{2} < 0$, deci, în ambele situaţii, $sgn f(x) = sgn l, \forall x \in S(x_0, \delta) \cap D\backslash\{x_0\}$.

Limite iterate.

Pentru funcţiile de 2 variabile (sau, mai general, de p variabile) se pot considera de asemenea aşa-numitele *limite iterate*:

$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, care, dacă există, nu sunt neapărat egale.

Observaţie. 1) Se poate întâmpla ca limitele iterate să existe şi să fie egale, dar limita globală (în ansamblul variabilelor): $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ să nu existe.

2) Se poate întâmpla ca limitele iterate să nu existe (sau să nu existe una dintre ele), dar limita globală să existe.

3) Dacă există limita globală şi dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, atunci există ambele limite iterate şi sunt egale cu limita globală.

4) Dacă există ambele limite iterate şi sunt diferite, atunci nu există limita globală.

Exemplu. Ne propunem să studiem limitele iterate şi limita globală în $(0, 0)$ pentru funcţia $f(x, y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(x, y); x + y = 0\}$. Avem:

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x} = 1, \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y+y^2}{y} = -1$, deci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

De altfel, acelaşi rezultat se obţine şi astfel: $f((\frac{1}{n}, 0)) = \frac{n+1}{n} \to 1$, iar $f((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \frac{1}{n} \to 0 \neq 1$.

FUNCŢII CONTINUE

Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D$ (prin urmare, a poate fi punct izolat sau punct de acumulare pentru D).

Definiţie. i) *(cu vecinătăţi)* Spunem că funcţia f este *continuă în punctul* $a \in D$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D) \subset V$)

ii) O funcţie care nu este continuă într-un punct se spune că este *discontinuă* în punctul respectiv.

iii) Funcţia f se numeşte *continuă (global) pe mulţimea* D dacă este continuă în fiecare punct din D.

Observaţie. Dacă $a \in D$ este punct izolat pentru D, atunci f este continuă în a. Într-adevăr, a fiind punct izolat, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $U_0 \cap D = \{a\}$. Prin urmare, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U_0 \cap D) = f(\{a\}) \subseteq V$, deci f este continuă în a.

Teoremă. *Fie* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *şi* $a \in D \cap D'$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că f este continuă în a. Atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D) \subset V$, de unde, cu atât mai mult, $f(U \cap D \backslash \{a\}) \subseteq V$, ceea ce înseamnă că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Suficienţa. Presupunem că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D \backslash \{a\}) \subseteq V$. Întrucât şi $f(\{a\}) \subseteq V$, rezultă că $f(U \cap D) \subseteq V$, deci f este continuă în a.

Consecinţă. Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă ori a este punct izolat, ori $a \in D \cap D'$ şi $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Din teorema anterioară şi teorema de caracterizare a existenţei limitei unei funcţii într-un punct, rezultă imediat:

Teoremă (de caracterizare a continuităţii punctuale). *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este continuă în punctul* a *(definiţia cu vecinătăţi);*

ii) (definiţia cu sfere) $\forall S_Y(f(a), \varepsilon), \exists S_X(a, \delta)$ *astfel încât* $\forall x \in S_X(a, \delta) \cap D, f(x) \in S_Y(f(a), \varepsilon)$;

iii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in D$, *cu* $d_1(x, a) < \delta$, *avem* $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

iv) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_n \subset D, x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} f(a)$.

Teoremă. *(caracterizarea pe componente pentru funcţii vectoriale) Funcţia* $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *este continuă în punctul* $a \in D$ *dacă şi numai dacă toate componentele sale* f_i, $i = \overline{1, q}$, *sunt funcţii continue în* a.

Exemple. i) Orice funcţie constantă $f:(X,d)\to(X,d)$ este continuă pe X deoarece $\forall a\in X$ şi $\forall(x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X}a\Rightarrow f(x_n)=c\xrightarrow{X}f(a)=c$.

ii) Aplicaţia identică $i:(X,d)\to(X,d)$ este continuă pe X deoarece $\forall a\in X$ şi $\forall(x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X}a\Rightarrow i(x_n)=x_n\xrightarrow{X}i(a)=a$.

iii) $f:(\mathbb{R},d_0)\to(X,d)$ (d_0 metrica discretă) este continuă pe $\mathbb{R}$ deoarece $\forall a\in\mathbb{R}$ arbitrar, fixat, $\forall x_n\xrightarrow{d_0}a, \exists n_1\in\mathbb{N}$ astfel ca $\forall n\geq n_1, d_0(x_n,a)<1$, deci $x_n=a, \forall n\geq n_1$. Prin urmare, $f(x_n)=f(a), \forall n\geq n_1$, de unde $f(x_n)\xrightarrow{X}f(a)$.

iv) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Observăm că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr,

$\cdot$ f este continuă în $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}y=0=f(0,0)$ şi

$\cdot$ f este continuă în orice punct din $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: Fie $(x_n,y_n)_n\subset\mathbb{R}^2, (x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\neq(0,0)$, oarecare. Atunci $x_0\neq0$ sau $y_0\neq0$, de unde, (eventual de la un loc încolo), $x_n\neq0$ sau $y_n\neq0$, deci $(x_n,y_n)\neq(0,0), \forall n\geq n_0$. Prin urmare, $f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2y_n}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0)$.

Teoremă (continuitatea compunerii). *Dacă $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ este continuă în $a\in X$ şi $g:(Y,d_2)\to(Z,d_3)$ este continuă în $b=f(a)\in Y$, atunci $g\circ f:(X,d_1)\to(Z,d_3)$ este continuă în a.*

Demonstraţie. $\forall(x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X}a\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{Y}f(a)\Rightarrow(g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\xrightarrow{Z}g(f(a))=(g\circ f)(a)$.

Teoremă *(de caracterizare a continuităţii globale). Fie $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este continuă pe X;

*ii) $\forall D\in\tau_Y\Rightarrow f^{-1}(D)\in\tau_X$ (*altfel spus*, f "întoarce" mulţimi deschise în mulţimi deschise);*

*iii) $\forall F_{\hat{i}nchis\breve{a}}\subseteq Y\Longrightarrow f^{-1}(F)$ este închisă în X (*altfel spus*, f "întoarce" mulţimi închise în mulţimi închise);*

iv) $\forall A\subseteq X\Rightarrow f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

Demonstraţie. *i)* $\Rightarrow$ *iv)*: $\forall A\subseteq X, \forall y\in f(\overline{A}), \exists x\in\overline{A}$ astfel ca $f(x)=y$. Deoarece $x\in\overline{A}, \exists(x_n)_n\subset A, x_n\to x$. Întrucât f este continuă pe X, $f(x_n)\to f(x)$. Prin urmare, $\exists(f(x_n))_n\subset f(A)$ aşa încât $f(x_n)\to f(x)=y\in\overline{f(A)}$.

iv) $\Longrightarrow$ *iii)*: $\forall F_{\hat{i}nchis\breve{a}}\subseteq Y$, fie $A=f^{-1}(F)$. Avem $f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subseteq\overline{F}=F$, deci $(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq f^{-1}(F)$, adică, echivalent, $f^{-1}(F)$ este închisă.

iii) $\Rightarrow$ *ii)*: $\forall D\in\tau_Y, Y\backslash D$ este închisă în Y, deci din ipoteză $f^{-1}(Y\backslash D)=f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(D)=X\backslash f^{-1}(D)$ este închisă în X, deci $f^{-1}(D)$ este deschisă în X.

ii) $\Longrightarrow$ *i)*: Fie $x_0\in X$ oarecare, fixat. Arătăm că f este continuă în x_0 folosind definiţia cu sfere. Fie deci $S_Y(f(x_0),\varepsilon)$ oarecare. Deoarece $S_Y(f(x_0),\varepsilon)$

este deschisă în X, conform cu ii), $f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$ este deschisă în X. Întrucât $x_0 \in f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$, există $S_X(x_0,\delta) \subset f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$, de unde $f(S_X(x_0,\delta)) \subset S_Y(f(x_0),\varepsilon)$, ceea ce arată că f este continuă în x_0.

Principiul contracţiei

Definiţie. O funcţie $f:(X,d) \to (X,d)$ este *contracţie* dacă $\exists \lambda \in (0,1)$ (numită *constanta contracţiei*) astfel ca

$$d(f(x),f(y)) \leq \lambda d(x,y), \forall x,y \in X$$

(cu alte cuvinte, prin aplicarea unei contracţii unei perechi de puncte, distanţa dintre ele se contractă).

Definiţie. O funcţie $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ se numeşte *lipschitziană pe X* dacă $\exists L > 0$ astfel încât $d_2(f(x),f(y)) \leq L d_1(x,y), \forall x,y \in X$.

Observaţie. Orice contracţie este evident funcţie lipschitziană.

Exemple. i) $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+, f(x) = ||x||$ (norma euclidiană)$, \forall x \in \mathbb{R}^p$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^p$ (de constantă Lipschitz $L=1$) datorită inegalităţii $|||x|| - ||y||| \leq ||x-y||, \forall x,y \in \mathbb{R}^p$, care implică $|f(x)-f(y)| \leq ||x-y||, \forall x,y \in \mathbb{R}^p$.

ii) în $\mathbb{R}$, orice funcţie derivabilă cu derivata mărginită pe un interval este lipschitziană pe intervalul respectiv (afirmaţia rezultă imediat în baza Teoremei lui Lagrange).

Propoziţie. Orice funcţie lipschitziană $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ este continuă pe X (deci orice contracţie este lipschitziană).

Demonstraţie. Evident, $\forall a \in X$ arbitrar, fixat, f este continuă în $a : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ astfel încât $\forall x \in X$, cu $d_1(x,a) < \delta$, avem $d_2(f(x),f(a)) \leq L d_1(x,a) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

Definiţie. Dacă (X,d) este un spaţiu metric şi $f:(X,d) \to (X,d)$, un element $x^* \in X$ se numeşte *punct fix* al lui f dacă $f(x^*) = x^*$.

Teorema lui Banach de punct fix *(principiul contracţiei) (teoremă de existenţă şi unicitate). Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $f:(X,d) \to (X,d)$ o contracţie. Atunci f admite un unic punct fix.*

Demonstraţie. I. *Existenţa punctului fix.*

Întrucât f este contracţie, există $\lambda \in (0,1)$ astfel ca $d(f(x),f(y)) \leq \lambda d(x,y), \forall x,y \in X$. Fie $x_0 \in X$ oarecare şi considerăm $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x_0), ..., x_n = f(x_{n-1}), ...$

$(x_n)_n$ este şir Cauchy:

$d(x_1,x_2) = d(f(x_0),f(x_1)) \leq \lambda d(x_0,x_1)$,

$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) \leq \lambda^2 d(x_0, x_1), ...,$
$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(*)\ d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq d(x_0, x_1)(\lambda^n + \lambda^{n+1} + ... + \lambda^{n+p-1}) = d(x_0, x_1)\lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \leq \\ &\leq d(x_0, x_1)\lambda^n \frac{1}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

i) Dacă $d(x_0, x_1) = 0$, atunci $x_1 = f(x_0) = x_0$, deci x_0 este punct fix.

ii) Dacă $d(x_0, x_1) > 0$, cum $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, din $(*)$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca, $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, adică $(x_n)_n$ este şir Cauchy şi deci convergent în spaţiul metric complet (X, d).

Vom arăta că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este punct fix. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned}d(x, f(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, f(x)) = d(x, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq \\ &\leq d(x, x_n) + \lambda d(x, x_{n-1})\end{aligned}$$

şi, cum $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, rezultă că $d(x, f(x)) = 0$, deci $f(x) = x$.

II. *Unicitatea punctului fix*.

Dacă ar exista $x \neq y$ puncte fixe în X, atunci am avea $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y)$, fals.

Exemplu. $(l^2, +, \cdot)$ este spaţiu Banach, cu metrica $d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$. Funcţia $f : l^2 \to l^2, f(x) = (\frac{x_n}{2})_n, \forall x = (x_n)_n \in l^2$, este o contracţie a lui l^2 în el însuşi şi are unicul punct fix, şirul nul $0 = (0) \in l^2$.

Homeomorfisme, izometrii

Definiţie. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *homeomorfism* (*izomorfism topologic*) dacă f este bijectivă şi *bicontinuă* (f, f^{-1} sunt continue).

Dacă există un homeomorfism între două spaţii metrice, acestea se vor numi *homeomorfe*.

Observaţie. i) Dacă f este homeomorfism, atunci f^{-1} este de asemenea homeomorfism.

ii) Compunerea a două homeomorfisme este de asemenea homeomorfism.

Definiţie. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *izometrie* dacă f este bijectivă şi

$$(*)\ d_2(f(x_1), f(x_2)) = d_1(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$$

(conservă distanţele).

Două spaţii metrice se numesc *izometrice* dacă există o izometrie între ele.

Observaţie. i) Din condiţia $(*)$ rezultă că f este injectivă, deci în definiţia anterioară este suficient ca f să fie surjectivă.

ii) Dacă f este izometrie, atunci şi f^{-1} este izometrie.

Exemple. i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$ este izometrie.

ii) $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, $f(x)=x+a, \forall x\in\mathbb{R}^k$ ($a\in\mathbb{R}^k$ fixat) (translaţia) este izometrie, deoarece f este bijectivă şi $||(x_1+a)-(x_2+a)||=||x_1-x_2||, \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^k$ ($||\cdot||$ este norma euclidiană).

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$ este homeomorfism.

Probleme propuse.

I. 1. Cercetaţi limitele iterate şi limita globală în $(0,0)$ pentru:

i) $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y); y=0\}$.

ii) $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \forall (x,y)\in\{(x,y); x\neq 0, y\neq 0\}$.

iii) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0).\end{cases}$

2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Arătaţi că deşi f are limite iterate în $(0,0)$, nu are limită în $(0,0)$ în ansamblul variabilelor.

3. Cercetaţi existenţa limitei în $(0,0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{x^2+y^2}), \forall (x,y)\neq(0,0)$.

4. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^3, f(x)=(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}, \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x})$, $a,b\in\mathbb{R}_+\backslash\{1\}, \alpha,\beta>0, m,n\in\mathbb{N}^*, m,n\geq 2$.

5. Studiaţi continuitatea pe mulţimea de definiţie a funcţiilor următoare:

i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

iii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\ln(1+y^2)-x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

iv) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x\sin x+y\sin y+z\sin z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$.

II. 1. Fie $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ două aplicaţii continue. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ este închisă.

2. Fie $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ două funcţii continue şi $A \subset X$ o mulţime densă în X. Arătaţi că dacă $f(x) = g(x), \forall x \in A$, atunci $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

3. Arătaţi că dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este continuă pe X.

4. Fie (X, d_1) un spaţiu metric complet şi $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcţie continuă. Arătaţi că dacă $(F_n)_n \subset X$ este un şir descendent de mulţimi închise, nevide, cu şirul diametrelor $(\delta(F_n))_n$ convergent la 0, atunci $f(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(F_n)$.

5. Fie $f, g : (X, d_1) \to (\mathbb{R}, d_u)$ două aplicaţii continue. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ este deschisă, iar mulţimea $B = \{x \in X; f(x) \geq g(x)\}$ este închisă.

6. Fie $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ o aplicaţie continuă. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) < 0\}$ este deschisă, iar mulţimea $B = \{x \in X; f(x) = 0\}$ este închisă.

7. Fie $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$. Arătaţi că dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, mulţimile $\{x \in X; f(x) > \lambda\}$ şi $\{x \in X; f(x) < \lambda\}$ sunt deschise, atunci f este continuă pe X.

8. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $x_0 \in X$ fixat. Dacă $0 < r < s$, atunci mulţimea $M = \{x \in X; r < d(x, x_0) < s\}$ este deschisă.

9. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Definim funcţia $f_A(x) = d(x, A)(= \inf\limits_{y \in A} d(x, y)), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A). Arătaţi că:

i) f_A este continuă pe X;

ii) Dacă $A, B \subset X$ sunt închise şi disjuncte, atunci mulţimile $D_A = \{x \in X; d(x, A) < d(x, B)\}$ şi $D_A = \{x \in X; d(x, A) > d(x, B)\}$ sunt deschise, disjuncte, $A \subset D_A, B \subset D_B$ (această proprietate de a separa mulţimile închise disjuncte prin mulţimi deschise disjuncte se numeşte *proprietate de normalitate* (*orice spaţiu metric este spaţiu normal*).

10. Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$,
$S(A, r) = \{x \in X; d(x, A) < r\}, T(A, r) = \{x \in X; d(x, A) \leq r\}, r > 0$.
Arătaţi că $S(A, r)$ este deschisă, iar $T(A, r)$ este închisă.

11. Precizaţi dacă funcţiile următoare sunt contracţii:

i) $(\mathbb{R}, d), d(x, y) = |x - y|, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5} arctgx$;

ii) $(\mathbb{R}_+, d), d(x, y) = |x - y|, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x + 1}$;

iii) $([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], d), d(x, y) = |x - y|, f : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \sqrt{\sin x}$;

iv) $([1, 9], d), d(x, y) = |x - y|, f : [1, 9] \to [1, 9], f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 2}$.

Teoremă. *Orice izometrie* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este un homeomorfism* $(Y = f(X))$.

Demonstraţie. f este continuă pe X: $\forall x_0 \in X, \forall S_Y(f(x_0), \varepsilon), \exists S_X(x_0, \varepsilon)$ aşa ca $f(S_X(x_0, \varepsilon)) = S_Y(f(x_0), \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \in S_Y(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ d_1(x, x_0) &< \varepsilon \Leftrightarrow x \in S_X(x_0, \varepsilon) \Leftrightarrow y = f(x) \in f(S_X(x_0, \varepsilon)). \end{aligned}$$

$f^{-1} : f(X) \to X$ este continuă pe $f(X)$: $\forall y_0 = f(x_0) \in f(X), \forall S_X(f^{-1}(y_0), \varepsilon), \exists S_Y(f(x_0), \varepsilon)$ aşa ca $f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon)) = S_X(x_0, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} x &\in S_X(x_0, \varepsilon) \Leftrightarrow d_1(x, x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ f(x) &\in S_Y(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon)). \end{aligned}$$

Observaţie. i) Reciproca nu este adevărată: $f : (\mathbb{R}, d_u) \to ((-1, 1), d_u), f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$ este homeomorfism al lui $(\mathbb{R}, d_u)$ pe $((-1, 1), d_u)$, dar nu este izometrie: $\exists x, y \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x) - f(y)| \neq |x - y|$.

ii) Funcţia limitativă a lui Baire $f : (\overline{\mathbb{R}}, \overline{d}) \to ([-1, 1], d_u), f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R} \\ 1, x = \infty \\ -1, x = -\infty \end{cases}$ este o izometrie între $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ şi $([-1, 1], d_u)$, unde $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ (deci $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ poate fi identificat cu $([-1, 1], d_u)$).

Compararea topologiilor

Definiţie. Fie $X, d_1, d_2, \tau_{d_1}, \tau_{d_2}$. Spunem că *topologia* τ_{d_1} este *mai puţin fină decât topologia* τ_{d_2} (sau τ_{d_2} este *mai fină decât* τ_{d_1}) dacă $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$. Notăm aceasta prin $\tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$.

Observaţie. Relaţia de fineţe pe mulţimea topologiilor induse de metrici pe un spaţiu X este o relaţie de ordine parţială deoarece este definită cu ajutorul incluziunii între clase de mulţimi.

Exemplu. Fie $\mathbb{R}, d_u, d_0$. Atunci $\tau_{d_u} \preccurlyeq \tau_{d_0}$ (deoarece $\tau_{d_u} \subseteq \tau_{d_0} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Prin urmare, topologia discretă este cea mai fină topologie care se poate introduce pe un spaţiu.

Teoremă. X, d_1, d_2. *Atunci* $\tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2} \Leftrightarrow$ *aplicaţia identică* $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ *este continuă pe* X.

Demonstraţie. $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este continuă pe $X \Leftrightarrow \forall D \in \tau_{d_1} \Rightarrow i^{-1}(D) = D \in \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$.

Definiţie. Spunem că două *metrici* d_1, d_2 definite pe un acelaşi spaţiu sunt *echivalente* dacă induc aceeaşi topologie ($\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).

Observaţie. $\tau_{d_1} = \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$ şi $\tau_{d_2} \preccurlyeq \tau_{d_1} \Leftrightarrow$ aplicaţia identică $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este bicontinuă $\Leftrightarrow i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este homeomorfism.

Teoremă. *Fie X, d_1, d_2. i) Dacă există $m, M > 0$ astfel ca*

$$(*)\ md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y), \forall x, y \in X,$$

atunci metricile d_1 şi d_2 sunt echivalente ($\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).

ii) Mai mult, dacă d_1 şi d_2 provin din norme, atunci $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ dacă şi numai dacă are loc $(*)$.

Exemplu. Fie $X = \mathbb{R}^k$ şi distanţele următoare pe $\mathbb{R}^k$ definite pentru $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$ prin $d_1(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}, d_2(x, y) = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i|, d_3(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$. Vom arăta că aceste trei metrici sunt echivalente, deci induc aceeaşi topologie (topologia uzuală) pe $\mathbb{R}^k$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i| \leq d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{k \max_{i=\overline{1,k}} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{k} \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i| = \sqrt{k} d_2(x, y), \end{aligned}$$

deci $d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{k} d_2(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, de unde $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Apoi,

$$d_2(x, y) = \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i| \leq d_3(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| \leq k \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i| = k d_2(x, y),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^k$, de unde $\tau_{d_2} = \tau_{d_3}$.

Funcţii uniform continue.

Definiţie. O funcţie $f : A \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *uniform continuă pe A* dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $d_1(x, y) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observaţie. f este continuă pe mulţimea $A \subset X$ dacă f este continuă în orice punct din A :

$\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ astfel încât $\forall x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Observăm astfel că proprietatea de uniformă continuitate înseamnă îndeplinirea proprietăţii de continuitate cu acelaşi δ pentru toate punctele mulţimii. Dacă δ depinde efectiv de trecerea de la un punct la altul, atunci f nu este uniform continuă.

Folosind definiţia, se poate arăta imediat:

Teoremă. (caracterizare cu şiruri a uniformei continuităţi) *O funcţie* $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă* $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subset A$, *cu* $d_1(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, *avem* $d_2(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Observaţie. Orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este evident continuă pe acea mulţime. Reciproca nu este în general adevărată. De exemplu, funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1]$, este continuă, dar nu este uniform continuă pe $(0, 1]$.

Propoziţie. Orice funcţie lipschitziană $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe X.

Demonstraţie. Deoarece f este lipschitziană pe X, $\exists L > 0$ astfel încât $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y), \forall x, y \in X$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ astfel încât $\forall x, y \in X$, cu $d_1(x, y) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, ceea ce înseamnă că f este uniform continuă pe X.

Reciproca nu este în general adevărată. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+$ este uniform continuă, dar nu este lipschitziană pe $\mathbb{R}_+$.

Teoremă (caracterizarea pe componente a funcţiilor vectoriale cu norma euclidiană) Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. *Atunci* f *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă toate funcţiile de coordonate* f_i, $i = \overline{1, q}$ *sunt uniform continue pe* A.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Dacă f este uniform continuă pe A, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x-y|| < \delta$, avem $||f(x)-f(y)|| < \varepsilon$, de unde, cu atât mai mult, $\forall i = \overline{1, q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta$, avem $|f_i(x) - f_i(y)| \leq ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$, deci toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1, q}$ sunt uniform continue pe A.

Suficienţa. Dacă toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1, q}$ sunt uniform continue pe A, atunci, $\forall i = \overline{1, q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta_i$, avem $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{q}$.

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\limits_{i=\overline{1,q}} \delta_i > 0$ astfel ca $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta$, avem $||f(x) - f(y)|| \leq \sum\limits_{i=1}^{q} |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{q} \cdot q = \varepsilon$, ceea ce arată că f este uniform continuă pe A.

Observaţie. Analog se obţine:

Teoremă. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. Atunci f este lipschitziană pe A dacă şi numai dacă toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1,q}$ sunt lipschitziene pe A.

Aplicaţii liniare.

Vom prezenta în cele ce urmează o clasă importantă de aplicaţii continue.

Definiţie. O funcţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ se numeşte *aplicaţie liniară (* sau *operator liniar)* dacă:

$$\begin{cases} i)\ T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k \text{ (aditivitatea)}, \\ ii)\ T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (omogenitatea)}. \end{cases}$$

Propoziţie. Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, ..., T_l)$ este un operator liniar, atunci:

i) $T(0) = 0$;

ii) $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;

iii) $\forall j = \overline{1,l}$, funcţiile de coordonate $T_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt aplicaţii liniare.

Demonstraţie. i) Din definiţie, $T(0) = T(0) + T(0)$, deci $T(0) = 0$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^k, T(0) = T(x) + T(-x)$, de unde $T(x) = -T(-x)$. Prin urmare, $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

iii) Afirmaţia se verifică imediat pe componente.

Observaţie. Fie $(e_1, e_2, ..., e_k)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^k$, iar $(f_1, f_2, ..., f_l)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^l$.

Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, ..., T_l)$ este un operator liniar, atunci, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$, $T(x) = T(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i T(e_i)$.

$\forall i = \overline{1,k}, T(e_i) \in \mathbb{R}^l$, deci $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij} f_j$.

Prin urmare, $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\sum\limits_{j=1}^{l} a_i^j x_i f_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} (\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} x_i) f_j$.

Calcule matriciale ne permit să obţinem că operatorul liniar T are forma

$$\begin{aligned} T(x) &= A_T x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \text{ unde matricea} \\ A_T &= \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1k} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2k} \\ ... \\ a_{l1}\ a_{l2}\ ...a_{lk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R}) \text{ se numeşte } \textit{matricea asociată aplicaţiei liniare } T. \end{aligned}$$

Reciproc, orice aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^k$, cu $A \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$, este un operator liniar.

Prin urmare, o aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este operator liniar dacă şi numai dacă $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^k$, cu $A \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$.

Exemplu. Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ sunt de forma $T(x) =$
$= (\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k}_{T_1(x)}, \underbrace{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k}_{T_2(x)}, ..., \underbrace{a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{lk}x_k}_{T_l(x)})$,
$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt de forma $T(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt de forma $T(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$ fixat.

Propoziţie. (Operaţii cu aplicaţii liniare)

1) Dacă $T, S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ sunt aplicaţii liniare, atunci:

i) $T + S$ este aplicaţie liniară şi $A_{T+S} = A_T + A_S$;

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda T$ este aplicaţie liniară şi $A_{\lambda T} = \lambda A_T$;

2) Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ sunt aplicaţii liniare, atunci $S \circ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ este aplicaţie liniară şi $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$.

Propoziţie. Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este lipschitziană (deci uniform continuă şi deci continuă).

Demonstraţie. $\forall x \in \mathbb{R}^k, ||T(x)|| = ||\sum\limits_{i=1}^{k} x_i T(e_i)|| \leq \sum\limits_{i=1}^{k} ||T(e_i)|| \cdot |x_i| \leq$

$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k} ||T(e_i)||}_{=L} \cdot ||x|| = L \cdot ||x||$, deci, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, ||T(x) - T(y)|| = ||T(x-y)|| \leq L \cdot ||x - y||$.

Mulţimi compacte.

Definiţie. i) Un spaţiu metric (X, d) se numeşte *compact* dacă din orice acoperire a sa cu deschişi: $X = \bigcup\limits_{i \in I} D_i, D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, se poate extrage o subacoperire finită: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}, \{i_1, ..., i_p\} \subset I$.

ii) O mulţime $A \subset (X, d)$ se numeşte *compactă* dacă privită ca subspaţiu $((A, d_{/A \times A}))$, este compact.

Propoziţie. Orice submulţime finită a unui spaţiu metric este compactă.

Demonstraţie. Dacă $A = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} D_i, \ , D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, atunci $\forall j = \overline{1, k}, \exists i_j \in I$ astfel ca $x_j \in D_{i_j}$, deci familia $\{D_{i_j}\}_{j = \overline{1,k}}$ este o subacoperire finită a lui A.

Teoremă. *Orice submulţime compactă a unui spaţiu metric este mărginită şi închisă.*

Observaţie. În $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană are loc şi reciproca, deci o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă. În spaţii metrice obişnuite, reciproca nu are loc: În $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica discretă: $\delta(\mathbb{R}) = 1 < \infty$, deci $\mathbb{R}$ este mărginită, este şi închisă, dar nu este compactă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că este compactă, cum $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} S(x,1)$, ar rezulta că $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} S(x_i,1) = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \{x_i\}$, fals.

Teoremă. *Orice submulţime închisă a unui spaţiu metric compact este compactă.*

Demonstraţie. Fie $A \subset (X,d)$, A închisă, X compact. Dacă $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} D_i$, $D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, întrucât $cA \in \tau_d$, rezultă că din $X = (\bigcup\limits_{i\in I} D_i) \cup cA$, obţinem $X = (\bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}) \cup cA$, de unde $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}$, ceea ce înseamnă că mulţimea A este compactă.

Consecinţă. Într-un spaţiu metric compact, mulţimile închise coincid cu mulţimile compacte (la fel cum, într-un spaţiu metric complet, mulţimile închise coincid cu cele complete).

Teoremă. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) (X,d) este compact;

ii) $\forall \mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi închise cu proprietatea intersecţiei finite (adică orice intersecţie finită de mulţimi din F este nevidă), avem $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Mulţimi secvenţial compacte (compacte prin şiruri)

Definiţie. Spunem că:

i) un spaţiu metric (X,d) este *secvenţial compact (compact prin şiruri)* dacă orice şir de puncte din X conţine un subşir convergent la un punct din X.

ii) o mulţime $A \subset (X,d)$ este *secvenţial compactă (compactă prin şiruri)* dacă privită ca subspaţiu este secvenţial compact.

Teoremă. *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este compactă dacă şi numai dacă este secvenţial compactă.*

Teoremă. *Dacă (X,d_1) şi (Y,d_2) sunt spaţii metrice compacte, atunci spaţiul metric produs $(Z = X \times Y, d), d(z_1,z_2) = \sqrt{d_1^2(x_1,x_2) + d_2^2(y_1,y_2)}, z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2) \in X \times Y$, este compact.*

Demonstraţie. Vom arăta, echivalent, că $(X \times Y, d)$ este secvenţial compact. Fie deci $(z_n)_n \subset X \times Y, z_n = (x_n, y_n), x_n \in X, y_n \in Y, \forall n$. Deoarece (X, d_1) este compact iar $(x_n)_n \subset X, \exists x_{n_k} \to x \in X$. Întrucât (Y, d_2) este compact iar $(y_{n_k})_k \subset Y, \exists y_{n_{k_l}} \to y \in Y$. Prin urmare, $\exists (z_{n_{k_l}})_l \subset X \times Y, z_{n_{k_l}} = (x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \overset{X\times Y}{\to} (x, y) = z$.

Observaţie. Rezultatul anterior are loc pentru un produs cartezian finit de k spaţii metrice compacte.

Consecinţă. Orice interval închis din $\mathbb{R}^k$ $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1, k}$ este mulţime compactă.

Probleme propuse.

I. 1. Fie $f : (0, \frac{1}{3}] \to (0, \frac{1}{3}], f(x) = x^2$. Arătaţi că f este o contracţie, dar f nu are nici un punct fix în spaţiul metric $((0, \frac{1}{3}], d_u)$. Explicaţi rezultatul.

2. Fie $(A = [0, \infty), d_u), f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Arătaţi că f este o contracţie pe A şi aflaţi punctul său fix.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, x + y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
a) Arătaţi că funcţia f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.
b) Determinaţi imaginea prin f a cercului $\mathcal{C}((0, 0), 1)$.

4. Cercetaţi dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

5. Arătaţi că funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare sunt lipschitziene pe $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = arctgx$.

6. Studiaţi uniforma continuitate a funcţiilor următoare:
i) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = \ln x, x \in (0, \infty)$;
iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2(x + y) - \sin x + \cos y$;
iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x, y - x)$.

II. 1. Arătaţi că în $(\mathbb{R}, d_u)$, subspaţiile $(0, 1)$ şi $[0, 1]$ nu sunt homeomorfe.

2. Arătaţi că $(\mathbb{R}, d_0)$ nu este homeomorf cu $(\mathbb{R}, d_u)$.

3. Arătaţi că orice funcţie uniform continuă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ transformă şiruri Cauchy tot în şiruri Cauchy.

4. Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ un homeomorfism al lui X pe Y. Arătaţi că dacă (Y, d_2) este complet şi f este uniform continuă pe X, atunci (X, d_1) este complet.

5. Arătaţi că dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $g : (Y, d_2) \to (Z, d_3)$ sunt uniform continue, atunci $g \circ f : (X, d_1) \to (Z, d_3)$ este uniform continuă.

6. Arătaţi că orice funcţie definită pe un spaţiu metric discret cu valori într-un spaţiu metric oarecare este uniform continuă.

7. Arătaţi că dacă (X, d_1) este spaţiu metric complet, iar $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este izometrie, atunci şi (Y, d_2) este complet.

8. Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o aplicaţie bijectivă. Arătaţi că f este homeomorfism dacă şi numai dacă $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \forall A \subset X$.

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi compacte.

I. Invarianţa compactităţii.

Teoremă. *Imaginea printr-o funcţie continuă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ a unei mulţimi compacte $K \subset X$ este de asemenea mulţime compactă* (altfel spus, *funcţiile continue duc (transformă) mulţimi compacte în mulţimi compacte*).

Demonstraţie. Dacă $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} D_i, (D_i)_{i \in I} \subset \tau_{d_2}$, atunci $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$.

Deoarece f este continuă pe K, iar $D_i \in \tau_{d_2}, \forall i \in I$, atunci $f^{-1}(D_i) \in \tau_{d_1}, \forall i \in I$.

K fiind compactă, $\exists \{D_{i_j}\}_{j=\overline{1,p}}$ aşa ca $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} f^{-1}(D_{i_j})$. Prin urmare, $f(K) \subseteq f(\bigcup_{j=1}^{p} f^{-1}(D_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^{p} f(f^{-1}(D_{i_j})) \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D_{i_j}$, deci $f(K) \subset Y$ este mulţime compactă.

Observaţie. În $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană, o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă. Dacă mulţimea K este doar mărginită sau doar închisă, atunci $f(K)$ poate să nu fie mărginită sau închisă:

i) Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

f este continuă pe mulţimea mărginită $(0, 1]$, dar $f((0, 1]) = [1, \infty)$ nu este mărginită;

ii) Fie $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = arctgx$.

f este continuă pe mulţimea închisă $\mathbb{R}$, dar $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este mulţime deschisă.

Propoziţie. $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este spaţiu compact.

Demonstraţie. Funcţia limitativă a lui Baire $f : (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0}) \to ([-1, 1], \tau_u)$ este izometrie, deci $f^{-1} : ([-1, 1], \tau_u) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este de asemenea izometrie şi deci continuă. Deoarece $([-1, 1], \tau_u)$ este compact, rezultă că $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este compact.

Teoremă. *Dacă (X, d_1) este compact, iar $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă şi bijectivă, atunci este un homeomorfism.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că $f^{-1} : (Y, d_2) \to (X, d_1)$ este continuă. Într-adevăr, $\forall F \subset X$ închisă, deoarece X este compact, rezultă că F este compactă, şi cum f este continuă, obţinem că $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ este compactă, deci închisă în Y.

II. Proprietăţi de mărginire.

Teoremă. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe mulţimea compactă K este mărginită pe K.*

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, $f(K) \subset (Y, d_2)$ este mulţime compactă, deci mărginită, ceea ce înseamnă că f este mărginită pe K.

Teorema lui Weierstrass. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ continuă pe mulţimea compactă K este mărginită şi îşi atinge marginile pe K.*

Demonstraţie. Conform teoremei anterioare, $f(K)$ este mărginită, deci $\exists M = \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $\exists m = \inf_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$. În plus, $m, M \in \overline{f(K)}$ şi cum mulţimea $f(K)$ este compactă, deci şi închisă, rezultă că $m, M \in f(K)$. Prin urmare, $\exists x_m, x_M \in K$ astfel încât $m = f(x_m)$ şi $M = f(x_M)$, adică, f îşi atinge marginile pe K.

Teorema lui Cantor. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe mulţimea compactă K este uniform continuă pe K.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0, \exists x_\delta, y_\delta \in K$, cu $d_1(x_\delta, y_\delta) < \delta$, dar $d_2(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n)_n, (y_n)_n \subset K$, cu $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ şi $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ $(*)$.

Deoarece $(x_n)_n \subset K$ şi mulţimea K este compactă, există un subşir $(x_{n_k})_k$ al lui $(x_n)_n$ astfel încât $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Prin urmare, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d_1(y_{n_k}, x_0) &\leq d_1(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \\ +d_1(x_{n_k}, x_0) &\leq \frac{1}{k} + d_1(x_{n_k}, x_0) \underset{k \to \infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $y_{n_k} \to x_0$. Funcţia f fiind continuă, $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$ şi $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$.

În relaţia $(*)$, rezultă în particular că $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită şi folosind continuitatea funcţiei distanţă, obţinem că $0 = d_2(f(x_0), f(x_0)) \geq \varepsilon_0 > 0$, contradicţie.

Teoremă. *Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită şi $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe A atunci f este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A}$.*

Exemple. i) $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x^2$ este uniform continuă pe $(-1, 1]$;
ii) $f : (0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$, nu este uniform continuă pe $(0, \frac{2}{\pi}]$.

Definiţie. O mulţime $A \subset (X, d)$ este *relativ compactă* dacă $\overline{A}$ este compactă.

Exemplu. $[0, 1), (0, 1), (0, 1]$ sunt relativ compacte.

Teoremă. *Dacă $A \subset (X, d_1)$ este relativ compactă, $f : A \to (Y, d_2)$ este continuă pe A şi (Y, d_2) este complet, atunci f este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A}$.*

Mulţimi conexe.

Definiţie. Un *spaţiu metric* (X, d) este:

i) *conex* dacă $\nexists D_1, D_2$ mulţimi deschise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = D_1 \cup D_2$.

ii) *neconex* sau *disconex* dacă nu este conex.

Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) (X, d) este spaţiu metric conex;

ii) $\nexists F_1, F_2$ mulţimi închise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = F_1 \cup F_2$;

iii) Singura mulţime nevidă din X simultan deschisă şi închisă este X.

Demonstraţie. Afirmaţiile sunt imediate întrucât $cD_2 = D_1, cD_1 = D_2$, deci mulţimile D_1, D_2 sunt şi închise.

Definiţie. $A \subset (X, d)$ este *mulţime*:

i) *conexă* dacă privită ca subspaţiu al lui X este conex, adică, $\nexists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

ii) *neconexă* sau *disconexă* dacă nu este conexă.

Intuitiv, o mulţime conexă este o mulţime "formată dintr-o singură bucată". De exemplu, o mulţime formată din două puncte diferite sau din două mulţimi deschise disjuncte nu este conexă:

Exemple. i) Presupunem că există $a, b \in X, a \neq b$. Atunci mulţimea $A = \{a, b\}$ nu este conexă, deoarece $\exists D_1 = c\{a\}, D_2 = c\{b\}$ mulţimi nevide deschise în X astfel ca $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

ii) Fie $A = (-1, 0) \cup (1, 2) \subset X = \mathbb{R}$. Atunci A este neconexă deoarece $\exists D_1 = (-1, 0), D_2 = (1, 2)$ mulţimi nevide deschise în $\mathbb{R}$ astfel ca $D_1 \cap A = (-1, 0) \neq \emptyset, D_2 \cap A = (1, 2) \neq \emptyset, A = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

Teoremă. *Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie oarecare de mulţimi conexe din (X, d), cu $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, atunci $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ este de asemenea conexă.*

Demonstraţie. Deoarece $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset, \exists a \in A_i, \forall i \in I$, deci $a \in A$.

Presupunem prin reducere la absurd că A este neconexă, deci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

Deoarece $a \in A \subseteq D_1 \cup D_2$, presupunem pentru a face o alegere că $a \in D_1$.

Pe de alta parte, întrucât $D_2 \cap A = \bigcup\limits_{i \in I}(D_2 \cap A_i) \neq \emptyset, \exists i_0 \in I$ aşa ca $D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$.

În acelaşi timp, observăm că $a \in D_1 \cap A_{i_0}$, deci $D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$.

De asemenea, $D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset$ şi $A_{i_0} \subseteq D_1 \cup D_2$, de unde A_{i_0} este neconexă, fals.

Teoremă. *Dacă $A \subset (X, d)$ este conexă, atunci $\forall B$, cu $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ este conexă (deci în particular, $\overline{A}$ este conexă).*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists B$ neconexă astfel ca $A \subset B \subset \overline{A}$ (din ipoteză, A fiind mulţime conexă).

Atunci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap B \neq \emptyset, D_2 \cap B \neq \emptyset, B \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$.

Deoarece $D_1 \cap B \neq \emptyset, \exists b_1 \in D_1 \cap B$ şi similar, deoarece $D_2 \cap B \neq \emptyset, \exists b_2 \in D_2 \cap B$.

Întrucât $B \subset \overline{A}$, rezultă că $b_1, b_2 \in \overline{A}$, deci $D_1 \cap A \neq \emptyset$ şi $D_2 \cap A \neq \emptyset$.

Pe de altă parte, obţinem evident că $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$ şi $A \subseteq D_1 \cup D_2$, deci A este neconexă, fals.

Funcţii continue pe mulţimi conexe.

Teoremă. (invarianţa conexiunii) *Dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este funcţie continuă pe X, iar A este mulţime conexă în (X, d_1), atunci $f(A)$ este de asemenea conexă în (Y, d_2) (orice funcţie continuă duce (transformă) mulţimi conexe dintr-un spaţiu metric tot în mulţimi conexe).*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $f(A)$ este neconexă, deci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în Y astfel încât $D_1 \cap f(A) \neq \emptyset, D_2 \cap f(A) \neq \emptyset, f(A) \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \emptyset$.

Deoarece f este continuă pe X, rezultă că mulţimile nevide $\widetilde{D_1} = f^{-1}(D_1)$ şi $\widetilde{D_2} = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în X. Mai mult, $\widetilde{D_1} \cap A \neq \emptyset, \widetilde{D_2} \cap A \neq \emptyset$,

$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(D_1 \cup D_2) = \widetilde{D_1} \cup \widetilde{D_2}, \widetilde{D_1} \cap \widetilde{D_2} \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \emptyset$, deci A este neconexă, fals.

Definiţie. Spunem că o funcţie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ are *proprietatea lui Darboux* pe X dacă transformă orice mulţime conexă din X într-o mulţime conexă din Y.

Consecinţă. Orice funcţie continuă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ are proprietatea lui Darboux pe X.

Propoziţie. O mulţime nevidă $A \subset (\mathbb{R}, d_u)$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.

Probleme propuse.

1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicaţii continue pe $\mathbb{R}$ şi fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = (f(x), g(y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

2. Arătaţi că mulţimea $K = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este compactă.

3. Fie mulţimea $A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, y \geq x+1\}$ şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y + y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Arătaţi că:

a) Mulţimea A este compactă.
b) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.
c) Este f uniform continuă pe A?
d) Este mulţimea $f(A)$ compactă?

4. Arătaţi că funcţiile următoare sunt uniform continue pe domeniul de definiţie:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

ii) $f : (1,2) \times (1,2) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x}{y}$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (y,x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

6. Fie (X, d_0) (d_0 fiind metrica discretă). Arătaţi că A este compactă dacă şi numai dacă este finită.

7. Cercetaţi dacă un spaţiu liniar normat $X \neq \{0\}$ poate fi compact.

5. Arătaţi că dacă $(x_n)_n \subset (X,d),\ x_n \to x$, atunci mulţimea termenilor şirului poate să nu fie compactă, dar mulţimea $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ este întotdeauna compactă.

6. Fie A, B două submulţimi nevide ale unui spaţiu normat X. Fie suma lor $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$. Arătaţi că:

i) Dacă A şi B sunt închise şi cel puţin una din ele este compactă, atunci $A+B$ este închisă. Suma a două mulţimi închise este în general mulţime închisă?

ii) Dacă A şi B sunt compacte, atunci $A+B$ este compactă.

7. Arătaţi că o reuniune infinită de mulţimi compacte nu este neapărat compactă.

8. Studiaţi uniforma continuitate a funcţiilor următoare:

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x^2-1} - \frac{1}{12}, x \in (0,1) \\ 2tgxarctg\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, x \in [-\frac{\pi}{12}, 0) \end{cases}$;

ii) $f(x) = \begin{cases} (\frac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{9x^2}}, x \in [-\frac{\pi}{12}, 0) \\ (1+3tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, x \in (0, \frac{\pi}{12}]. \end{cases}$

9. Arătaţi că funcţia de tip Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -x, x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

este uniform continuă pe $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ şi $[0,1]\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dar nu este uniform continuă pe $[0,1]$.

10. Cercetaţi dacă compunerea a două funcţii lipschtziene este de asemenea funcţie lipschitziană.

11. Arătaţi că mulţimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)=(arctgt,\ln(1+t^2)),t\in[-1,1]\}$ este compactă şi conexă.

12. Indicaţi o mulţime neconexă pentru care aderenţa este conexă.

13. Arătaţi că mulţimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2<4,y\neq x+1\}$ nu este conexă.

14. Fie A,B două submulţimi nevide ale unui spaţiu normat X. Fie suma lor $A+B=\{a+b;a\in A,b\in B\}$. Arătaţi că:

i) Dacă A şi B sunt închise şi cel puţin una din ele este compactă, atunci $A+B$ este închisă. Suma a două mulţimi închise este în general mulţime închisă?

ii) Dacă A şi B sunt compacte, atunci $A+B$ este compactă.

15. Arătaţi că dacă (X,d) este un spaţiu metric compact, iar $f:(X,d)\rightarrow(0,\infty)$ este o aplicaţie continuă, atunci $\exists\lambda>0$ astfel ca $f(x)\geq\lambda,\forall x\in X$.

16. Arătaţi că funcţia distanţă de la un punct la o mulţime dintr-un spaţiu metric (X,d) este uniform continuă pe X.

17. Fie $f,g:(X,d_1)\rightarrow(Y,d_2)$ două funcţii continue, (X,d_1) fiind spaţiu metric compact. Arătaţi că multimea $A=\{x\in X;f(x)=g(x)\}$ este compactă.

18. Fie $A\subset(X,d)$ o mulţime compactă, nevidă şi $\delta(A)$, diametrul sau. Arătaţi că $\exists x_0,y_0\in A$ astfel ca $\delta(A)=d(x_0,y_0)$.

Propoziţie. O mulţime nevidă A din $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Presupunem prin reducere la absurd că există în $\mathbb{R}$ o mulţime conexă A, care nu este interval.

O mulţime I din $\mathbb{R}$ este interval dacă $\forall a, b \in I$, cu $a < b$ şi $\forall c$, cu $a < c < b$, rezultă că $c \in I$ (adică, $\forall a, b \in I$, cu $a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I$).

Prin urmare, întrucât A nu este interval, $\exists a, b \in A, \exists c$, cu $a < c < b$ dar $c \notin A$. Fie $D_1 = A \cap (-\infty, c), D_2 = A \cap (c, +\infty)$. Observăm că $a \in D_1, b \in D_2$, deci mulţimile sunt nevide. În plus, sunt deschise în A, $D_1 \cup D_2 = A$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, deci A este neconexă, fals.

Suficienţa. Presupunem prin reducere la absurd că există un interval I care nu este mulţime conexă. Atunci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise (şi închise) în I, disjuncte astfel încât $I = D_1 \cup D_2$. Fie $a \in D_1, b \in D_2$. Cum $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, rezultă că $a \neq b$. Presupunem că $a < b$ şi cum I este interval, vom avea $[a, b] \subseteq I$.

Fie $c = \sup(D_1 \cap [a, b])(\in \overline{D_1 \cap [a, b]} \subseteq \overline{D_1} \cap \overline{[a, b]} = D_1 \cap [a, b])$. Arătăm că $c \neq b$. Într-adevăr, dacă $c = b$, atunci $b \in D_1 \cap D_2$, fals. Prin urmare, $c \in D_1 \cap [a, b)$, deci $\exists \varepsilon > 0$ astfel ca $c + \varepsilon \in D_1 \cap [a, b) \subset D_1 \cap [a, b]$, fals, întrucât c este supremum.

Consecinţă. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă duce intervale în intervale.

Consecinţă (teorema valorilor intermediare). Dacă $f : (X, d_1) \to (\mathbb{R}, d_u)$ este funcţie continuă pe X, iar $A \subset (X, d)$ este mulţime conexă, atunci $f(A)$ este interval (adică $\forall a, b \in A$, *cu* $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, rezultă că $\lambda \in f(A)$, adică $\exists c \in A$, cu $f(c) = \lambda$) sau, echivalent, $\forall a, b \in A$, cu $f(a) < f(b) \Rightarrow (f(a), f(b)) \subseteq f(A))$.

Regăsim astfel,

Consecinţă. Dacă $f : I_{\text{interval}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe I, atunci are proprietatea lui Darboux pe I, adică $\forall a, b \in I$, cu $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in I$, cu $f(c) = \lambda$.

Reciproca nu este adevărată. Există funcţii care au proprietatea lui Darboux pe un interval, dar nu sunt continue pe intervalul respectiv: $f : [0, 1] \to [-1, 1], f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x}, x \in (0, 1] \\ 1, x = 0. \end{cases}$

Spaţii metrice/mulţimi conexe prin arce.

Definiţie. i) Un spaţiu metric (X, d) se numeşte *conex prin arce* dacă orice două elemente ale sale pot fi unite în mod continuu printr-un drum (arc) conţinut în X, adică,

$\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists \varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$ continuă pe $[a,b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2$ şi $\varphi(t) \in X, \forall t \in [a,b]$.

ii) O mulţime $A \subset (X,d)$ este *conexă prin arce* dacă privită ca subspaţiu este conex prin arce.

Propoziţie. Orice spaţiu metric conex prin arce (X,d) este conex.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$ oarecare, fixat. Deoarece (X,d) este conex prin arce, $\forall x \in X, \exists \varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$ continuă pe $[a,b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_0, \varphi(b) = x$ şi $\varphi(t) \in X, \forall t \in [a,b]$. Notăm $\varphi([a,b]) = A_x$, care este de asemenea mulţime conexă.

Prin urmare, $X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$ este conexă ($\forall x \in X, x_0 \in A_x$, deci $\bigcap\limits_{x \in X} A_x \neq \emptyset$).

Reciproca nu este adevărată. Există mulţimi conexe care nu sunt conexe prin arce.

Teoremă *(invarianţa conexiunii/conectivităţii prin arce). Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi conexe prin arce este de asemenea o mulţime conexă prin arce (* altfel spus, *funcţiile continue duc mulţimi conexe prin arce în mulţimi conexe prin arce*).

Demonstraţie. Fie $f : A \subset (X,d_1) \to (Y,d_2)$ continuă pe mulţimea conexă prin arce A. Vom arăta că $f(A)$ este de asemenea conexă prin arce. Pentru aceasta, fie $y_1, y_2 \in f(A)$ oarecare. Există $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

Deoarece $x_1, x_2 \in A$, iar A este conexă prin arce, $\exists \varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to A$ continuă pe $[a,b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2$ şi $\varphi(t) \in A, \forall t \in [a,b]$.

Observăm că funcţia $f \circ \varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to f(A)$ este continuă pe $[a,b], (f \circ \varphi)(a) = f(\varphi(a)) = f(x_1) = y_1, (f \circ \varphi)(b) = f(\varphi(b)) = f(x_2) = y_2$ şi $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(x) \in f(A), \forall t \in [a,b]$, ceea ce înseamnă că $f(A)$ este conexă prin arce.

Problematica convexităţii/conectivităţii în $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$

Definiţie. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte *convexă* dacă orice două elemente din mulţimea A pot fi unite în mod continuu printr-un *segment închis* conţinut în A :

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq A,$$

unde $[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R}^k; x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0,1] (\subset \mathbb{R})\}$.

Observaţie. i) Evident, orice mulţime convexă este conexă prin arce (deci şi conexă). Există însă mulţimi conexe prin arce care nu sunt convexe, cum ar fi, de exemplu, cercurile din $\mathbb{R}^2$.

ii) Orice segment din $\mathbb{R}^k$ şi, în particular, orice interval din $\mathbb{R}$ este mulţime convexă.

Propoziţie. Orice sferă deschisă (sau închisă) din $\mathbb{R}^k$ este mulţime convexă.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $S(x_0, r)$ şi $a, b \in S(x_0, r)$, oarecare. Arătăm că $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^k; x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\} \subset S(x_0, r)$. Fie deci $y \in [a, b]$ oarecare. Atunci

$$\begin{aligned} ||y - x_0|| &= ||\lambda a + (1 - \lambda)b - x_0|| = ||\lambda a + (1 - \lambda)b - [\lambda + (1 - \lambda)x_0]|| \leq \\ &\leq \lambda||a - x_0|| + (1 - \lambda)||b - x_0|| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r, \end{aligned}$$

deci $y \in S(x_0, r)$.

Propoziţie. Orice paralelipiped (interval) închis $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$ din $\mathbb{R}^k$ este mulţime convexă.

Demonstraţie. Fie $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in P$, oarecare. Prin urmare, $a_i \leq x_i \leq b_i$ şi $a_i \leq y_i \leq b_i$, $\forall i = \overline{1, k}$.

Arătăm că $[x, y] \subseteq P$, adică, $\forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in P$, ceea ce revine la a arăta că $a_i \leq \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i \leq b_i, \forall i = \overline{1, k}$. Într-adevăr, afirmaţia este imediată întrucât $\lambda a_i \leq \lambda x_i \leq \lambda b_i$ şi $(1 - \lambda)a_i \leq (1 - \lambda)y_i \leq (1 - \lambda)b_i, \forall i = \overline{1, k}$.

Observaţie. Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi convexe poate să nu fie convexă, după cum se remarcă din următorul contraexemplu:

Funcţia continuă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, \pi]$ duce mulţimea convexă $[0, \pi]$ într-un semicerc, care nu este mulţime convexă.

Teoremă. *Orice submulţime nevidă, deschisă D a lui $\mathbb{R}^k$ este conexă dacă şi numai dacă este conexă prin arce.*

Mulţimi precompacte. **Mulţimi relativ compacte.**

Definiţie. O mulţime $A \subset (X, d)$ este *precompactă* (sau, *total mărginită*) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \{S(x_i, \varepsilon)\}_{i=\overline{1,p}}, x_i \in A$ astfel ca $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{p} S(x_i, \varepsilon)$.

Observaţie. Orice submulţime a unei mulţimi precompacte este de asemenea precompactă.

Exemplu. Mulţimea termenilor unui şir Cauchy este mulţime precompactă. Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, deoarece $(x_n)_n$ este şir Cauchy, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa ca $\forall n \geq n_0$, avem $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, deci $\{x_{n_0}, ..., x_n, ...\} \subseteq S(x_{n_0}, \varepsilon)$. Prin urmare, $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} S(x_i, \varepsilon)$.

Teoremă. *Orice mulţime total mărginită este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $A \subset (X,d)$ total mărginită. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} S(x_i, 1)$. Prin urmare, $\forall x, y \in A$, rezultă că $\exists i_1, i_2 = \overline{1,p}$ astfel ca $x \in S(x_{i_1}, 1)$ şi $y \in S(x_{i_2}, 1)$, deci $d(x,y) < 2 + d(x_{i_1}, x_{i_2})$, ceea ce implică $\delta(A) \leq 2 + \delta(M)$, unde $M = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Deoarece mulţimea $M = \{x_1, ..., x_p\}$ este mărginită, obţinem că $\delta(A) < \infty$, adică A este mărginită.

Teoremă (*Hausdorff*) *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este compactă dacă şi numai dacă este precompactă şi completă.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $A \subset (X,d)$ compactă. Deoarece $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} S(x, \varepsilon)$, rezultă că $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} S(x_i, \varepsilon)$, deci A este precompactă.

Fie acum un şir Cauchy $(x_n)_n \subset A$. Deoarece A este compactă, $\exists x_{n_k} \to x \in A$ şi în final rezultă că $x_n \to x$, deci A este completă.

Teoremă. *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este precompactă dacă şi numai dacă orice şir din A conţine un subşir Cauchy.*

Teoremă. *Dacă $A \subset (X,d)$ este relativ compactă, atunci este precompactă.*

Demonstraţie. Deoarece A este relativ compactă, atunci $\overline{A}$ este compactă, deci şi precompactă, de unde $A \subseteq \overline{A}$ este de asemenea precompactă.

Problematica în $\mathbb{R}^k$

Teoremă. *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) A este compactă;
ii) A este secvenţial compactă;
iii) A este mărginită şi închisă.

Teoremă. *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) A este precompactă;
ii) A este relativ compactă;
iii) A este mărginită.

Demonstraţie. ii) $\Rightarrow$ iii): Dacă A este relativ compactă, atunci $\overline{A}$ este compactă, deci mărginită. Cum $A \subseteq \overline{A}$, rezultă că şi A este mărginită.
iii) $\Rightarrow$ ii): Deoarece A este mărginită, avem $\delta(A) = \delta(\overline{A}) < \infty$, deci $\overline{A}$ este mărginită. Fiind şi închisă, $\overline{A}$ este compactă, adică A este relativ compactă.

Spaţiul $\mathcal{C}(K)$.

Definiţie. Fie un spaţiu metric (X,d). Spunem că o familie $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ este:

i) *echicontinuă în* $x_0 \in X$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists V_\varepsilon(x_0) \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in V_\varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$.

ii) *echicontinuă pe* X dacă este echicontinuă în orice punct din X.

Observaţie. Dacă familia $\mathcal{F}$ este echicontinuă în $x_0 \in X$, atunci toate funcţiile $f \in \mathcal{F}$ sunt continue în x_0 iar vecinătatea V_ε (care corespunde fiecărui $\varepsilon > 0$) este aceeaşi pentru toate funcţiile familiei.

Fie $\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R},\ f$ continuă pe $K\}$, mulţimea tuturor funcţiilor continue cu valori reale, definite pe un spaţiu metric compact K. Conform Teoremei lui Weierstrass, orice funcţie $f \in \mathcal{C}(K)$ este mărginită, deci aplicaţia $||\cdot|| : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{x \in K}|f(x)|, \forall f \in \mathcal{C}(K)$ este bine definita. Mai mult, este o normă, numită *norma Cebâşev,* sau *norma convergenţei uniforme* şi care induce distanţa $d(f,g) = \sup\limits_{x \in K}|f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}(K)$.

Teoremă. *i) Un şir* $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(K)$ *converge în metrica* d *la un element* $f \in \mathcal{C}(K)$ *dacă şi numai dacă* $(f_n)_n$ *converge uniform pe* K *la* f.

ii) $\mathcal{C}(K)$ *este spaţiu Banach.*

Teorema lui Arzelà-Ascoli. *Fie un spaţiu metric compact* K. *O familie de funcţii* $M \subset \mathcal{C}(K)$ *este relativ compactă în* $\mathcal{C}(K)$ *dacă şi numai dacă este mărginită în* $\mathcal{C}(K)$ *şi echicontinuă pe* K.

CALCUL DIFERENŢIAL PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

În acest capitol, vom studia două extinderi la $\mathbb{R}^n$ ale noţiunii de derivată a unei funcţii reale de o variabilă reală, şi anume, noţiunea de diferenţială (sau derivată Fréchet) pe de o parte, şi noţiunea de derivată după o direcţie (sau derivată Gâteaux) pe de altă parte.

Derivata parţială a unei funcţii într-un punct.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$şi $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Există $S(a, r) \subset D$.

$\forall i = \overline{1, n}$ fixat, considerăm funcţia $(*)$ $x_i \to f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$, care este bine definită pentru $\forall x_i$, $0 \le |x_i - a_i| < r$.

Definiţie. Spunem că:

i) funcţia f are *derivată parţială în punctul* a *în raport cu variabila* x_i dacă funcţia de o variabilă $(*)$ are derivată în punctul a în sens obişnuit (ca funcţie reală de o variabilă reală):

$\exists \lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{x_i-a_i} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (sau $f'_{x_i}(a))(\in \overline{\mathbb{R}})$.

În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul a.*

ii) funcţia f este *parţial derivabilă în punctul a în raport cu variabila x_i* dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

Observaţie. i) Dacă $n = 2$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

ii) Dacă $n = 3$, atunci
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$.

Exemplu. Arătaţi că $f(x, y, z) = \ln(tgx + tgy + tgz)$ verifică relaţia $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 2$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ şi, prin simetrie (sau direct) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}$, deci $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot 2(tgx + tgy + tgz) = 2$.

Probleme propuse

1. Arătaţi că orice mulţime finită cu cel puţin două elemente din $\mathbb{R}^2$ nu este conexă.

2. Arătaţi că un spaţiu metric (X, d) este conex dacă şi numai dacă pentru orice două mulţimi închise nevide $A, B \subset (X, d), \{x \in X; d(x, A) = d(x, B)\} \neq \emptyset$.

3. Arătaţi că un spaţiu metric (X, d) este conex dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : X \to \{0, 1\}$ este constantă.

4. Arătaţi că un spaţiu metric (X, d) este conex dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

5. Arătaţi că dacă (X, d) este un spaţiu metric şi orice funcţie continuă $f : X \to X$ posedă cel puţin un punct fix, atunci (X, d) este conex.

9. Fie $A, B \subset (X, d)$ două mulţimi conexe astfel ca $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Arătaţi că $A \cup B$ este conexă.

10. Arătaţi că mulţimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + 1)^2 + y^2 < 1\}$ este conexă.

11. Fie $A, B \subset (X, d)$ două mulţimi închise astfel ca $A \cup B$ şi $A \cap B$ sunt conexe. Arătaţi că A şi B sunt conexe. Arătaţi că ipoteza că A şi B sunt închise este necesară.

12. Arătaţi că un spaţiu metric (X, d) este neconex dacă şi numai dacă există o submulţime proprie, nevidă a lui X care sa fie simultan deschisă şi închisă.

13. Fie mulţimea $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x + 1\}$ şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y + y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Este mulţimea $f(A)$ conexă?

14. Fie $A \subset (X, d)$. Arătaţi că dacă A este compactă, atunci A' este compactă.

15. Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare. Arătaţi că:

i) orice reuniune finită de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

ii) orice intersecţie de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

ii) reuniunea dintre o mulţime compactă şi o mulţime finită este mulţime compactă;

iv) diferenţa a două mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

v) interiorul unei mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

vi) frontiera unei mulţimi compacte (respectiv, relativ compactă) este compactă (respectiv, relativ compactă).

16. Arătaţi că dacă $(x_n)_n \subset (X, d)$, $x_n \to x$, atunci mulţimea termenilor şirului poate să nu fie compactă, dar mulţimea $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ este întotdeauna compactă.

17. Arătaţi că orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este precompactă.

18. Arătaţi că orice mulţime dintr-un spaţiu metric discret este precompactă dacă şi numai dacă este finită.

19. Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ este precompactă în $(\mathbb{R}, d_u)$, dar nu este compactă.

20. Arătaţi că orice funcţie uniform continuă transformă mulţimi precompacte tot în mulţimi precompacte.

21. Ce condiţie trebuie să îndeplinească o mulţime $A \subset (X, d)$ pentru ca funcţia sa caracteristică $\aleph_A$ sa fie continuă pe X?

22. Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul mărginit sau nemărginit (a, b) din $\mathbb{R}$ astfel ca $\exists \lim\limits_{x \to a x > a} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $\exists \lim\limits_{x \to a x > a} f(x) \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este uniform continuă pe (a, b).

Definiţie. Spunem că:

i) funcţia f are *derivată parţială în punctul* a *în raport cu variabila* x_i dacă funcţia de o variabilă $(*)$ are derivată în punctul a în sens obişnuit (ca funcţie reală de o variabilă reală):

$\exists \lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{x_i-a_i} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (sau $f'_{x_i}(a))(\in \overline{\mathbb{R}})$.

În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei* f *în raport cu variabila* x_i *în punctul* a.

ii) funcţia f este *parţial derivabilă în punctul* a *în raport cu variabila* x_i dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

iii) funcţia f este *parţial derivabilă în raport cu variabila* x_i *pe* D dacă f este parţial derivabilă în raport cu variabila x_i în orice punct din D.

În acest caz, se obţine o funcţie $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, \forall a \in D \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1,n}$ arbitrar, fixat).

iv) funcţia f este *parţial derivabilă pe* D dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele în orice punct din D.

În acest caz, se pot defini n funcţii $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, numite *derivatele parţiale ale lui* f *pe* D.

Observaţie. i) Spre deosebire de cazul funcţiilor reale de o singură variabilă reală, o funcţie poate să nu fie continuă într-un punct, dar să fie derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în acel punct:

Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{şi } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale în origine:

f nu este continuă în $(0,0)$ deoarece nici nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0), f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \to 0, f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \to 1 \neq 0.$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$, ceea ce arată că f este parţial derivabilă în $(0,0)$.

ii) Dacă $n = 2$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}.$$

iii) Dacă $n = 3$, atunci

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$,

$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$, iar $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^3 y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^3}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$.

Derivate parţiale de ordin superior.

Definiţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe D. Fie $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, cele n derivate parţiale ale lui f.

Dacă există derivata parţială în $a \in D$ (respectiv, în orice $a \in D$) în raport cu variabila x_j ($j = \overline{1,n}$) a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = \overline{1,n}$), atunci aceasta se numeşte *derivata parţială de ordin 2 a funcţiei f în punctul a* (respectiv, *pe D*).

Se notează prin: $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (= (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j})$, dacă $i \neq j$ şi $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (= (f'_{x_i})'_{x_i} = f''_{x_i^2})$, dacă $i = j$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, cu $i \neq j$ se numesc *derivate parţiale mixte de ordin* 2.

Observaţie. 1) Pentru $n = 2$, avem derivatele parţiale de ordin 2 :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
Pentru $n = 3$, avem derivatele parţiale de ordin 2 :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$.

2) Nu este obligatoriu ca derivatele parţiale mixte ale unei funcţii într-un punct să fie egale:

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\overset{\text{not.}}{=} g})(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{y} = x$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$.

Analog,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\overset{\text{not.}}{=} h})(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{x} = -y$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$,

aşadar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(2x+3y)$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -6\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = -6\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9\sin(2x+3y)$.

Pentru definirea derivatelor parţiale de ordin superior se procedează recurent în aceeaşi manieră: de exemplu, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k})$ etc.

Derivata după o direcţie (vector)

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$. Există $S(a,r) \subset D$.

Dreapta care trece prin punctul a şi are direcţia $u \in \mathbb{R}^n$, este dreapta care trece prin punctele a şi $a+u$, adică mulţimea $\{a+tu; t \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. i) Spunem că *funcţia f are derivată în punctul a după direcţia (vectorul) u* (numită şi *derivată Gâteaux*) dacă există limita $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \in \overline{\mathbb{R}}$, notată prin $f'(a;u)$ sau $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ sau $\frac{df}{du}(a)$.

ii) Dacă $\frac{df}{du}(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f *este derivabilă în punctul a după direcţia (vectorul) u*.

Observaţie. 1) Dacă $n = 1$, se obţine definiţia existenţei derivatei (respectiv, a derivabilităţii) pentru funcţii reale de o variabilă reală.

2) Presupunem $u \neq 0$.

i) $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{x \to a, x-a=tu} \frac{f(x)-f(a)}{t}$, deci practic limita acestui raport de creşteri se realizează doar pe un drum particular, şi anume, pe dreapta care trece prin a şi are direcţia u.

ii) Fie funcţia $\varphi : (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||}) \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(a+tu), \forall t \in (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||})$.

Funcţia φ este bine definită deoarece $\forall t \in (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||}), a+tu \in S(a,r) \subset D$.

Avem: $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$, deci f este derivabilă în punctul a după direcţia u dacă şi numai dacă φ este derivabilă în 0 (în sens obişnuit, ca funcţie reală, de o variabilă reală).

Probleme propuse.

1. Calculaţi derivatele parţiale pentru următoarele funcţii (atât funcţiile, cât şi derivatele acestora se vor considera pe domeniile maxime de existenţă):

i) $f(x,y) = (x^2+y^2) arctg \frac{x}{y}$;

ii) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

iii) $f(x,y) = x\ln(xy)$;
iv) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$;
v) $f(x,y,z) = e^{\frac{y}{z}}\ln\frac{z}{x}$;
vi) $f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x$;
vii) $f(x,y,z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2z} + \frac{1}{y^3z^2}$;
viii) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+y}}{z}\arcsin\frac{x^2-y^2}{z^2}$.

2. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x\cos y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (*ecuaţia lui Laplace*);
ii) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x\sin y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;
iii) $f : \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

3. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

4. Studiaţi dacă derivatele parţiale mixte de ordin 2 în $(0,0)$ coincid pentru funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}$. Verificaţi dacă $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

6. Arătaţi că $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, dacă $z = \ln(x^2+xy+y^2)$.

7. Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2yz, a = (1,1,0), u = (1,0,-3)$. Calculaţi $\frac{df}{du}(a)$.

8. Cercetaţi derivabilitatea după un vector $u \in \mathbb{R}^n$ într-un punct $a \in \mathbb{R}^n$ pentru funcţiile următoare:
i) $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$;
ii) $||\cdot||^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

9. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Cercetaţi dacă f are derivată în $(0,0)$ după orice versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0,2\pi)$.

10. Calculaţi $\frac{dT}{du}(a)$, unde $T:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este un operator liniar, iar $a \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^k, u \neq 0$ sunt oarecare.

11. Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0), \end{cases}$

nu este continuă în $(0,0)$, dar admite derivată în $(0,0)$ după orice vector $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Cercetaţi continuitatea lui f în $(0,0)$;

b) Studiaţi derivabilitatea în $(0,0)$ a lui f după un versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$.

13. Fie $f(x,y,z) = e^{xy} \sin z$. Arătaţi că $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$.

14. Calculaţi derivatele parţiale de ordin II pentru $f(x,y) = x^2 \ln(1 - xy)$.

15. Fie $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$. Arătaţi că $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$.

Observaţie. Fie $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0_n, v = \frac{u}{||u||}$. Atunci $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tv||u||)-f(a)}{t||u||} ||u|| = ||u|| \cdot \frac{df}{dv}(a)$, deci consideraţiile referitoare la derivabilitatea după un vector se pot practic reduce la situaţia în care vectorul este un versor.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi $u = (2, 1, -2)$. Atunci $\frac{df}{du}(0, 4, 3) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(2t, 4+t, 3-2t)-f(0,4,3)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin\sqrt{4t^2+(4+t)^2+(3-2t)^2}-\sin 5}{t} = \frac{2}{5} \cos 5$.

Propoziţie. Dacă $e_i = (0, 0, ...1, 0, ..., 0), i = \overline{1, n}$ sunt versorii bazei canonice, atunci

$$\frac{df}{de_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Într-adevăr, $\frac{df}{de_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Observaţie. Funcţiile derivabile într-un punct după orice versor nu sunt neapărat continue în punctul respectiv (vezi probleme propuse).

Prezentăm în cele ce urmează următoarea formă în $\mathbb{R}^n$ a teoremei lui Lagrange:

Teoremă (de medie). *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă pe orice direcţie în orice punct din D. Atunci, $\forall a, b \in D, \exists c \in (a, b)$ (segmentul deschis din $\mathbb{R}^n$ de capete a, b) astfel încât $f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c)$.*

Demonstraţie. Definim, ca şi în precedent, funcţia $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(a + t(b - a)), \forall t \in [0, 1]$.

Evident, deoarece mulţimea D este convexă, atunci $\forall t \in [0, 1], a + t(b - a) \in [a, b] \subset D$, deci φ este bine definită.

Observăm că φ este derivabilă în orice punct din $[0, 1] : \forall t_0 \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(a + t(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{f(a + t_0(b - a) + (t - t_0)(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{t - t_0} = \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{f(a + t_0(b - a) + s(b - a)) - f(a + t_0(b - a))}{s} = \\
&= \frac{df}{d(b - a)}(a + t_0(b - a)).
\end{aligned}$$

Mai mult, $\varphi'(t) = \frac{df}{d(b-a)}(a + t(b - a)), \forall t \in [0, 1]$.

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei φ, $\exists\theta \in (0,1)$ astfel încât $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$.

Notând $c = a + \theta(b-a) \in (a,b)$, rezultă că $f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c)$.

Consecinţă. Dacă $D \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata nulă pe orice direcţie, în orice punct din D, atunci f este constantă pe D.

Demonstraţie. Din teorema de medie rezultă că $f(b) = f(a), \forall a, b \in D$, de unde concluzia.

FUNCŢII DIFERENŢIABILE.

Să amintim pentru început următoarea noţiune din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală:

Fie $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $t_0 \in (a,b)$. Funcţia f este *derivabilă* în t_0 dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, care se notează cu $f'(t_0)$ şi se numeşte *derivata funcţiei f în punctul t_0*.

De asemenea, se cunoaşte faptul că f este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă f este *diferenţiabilă* în t_0, adică există o aplicaţie liniară $T = df(t_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (numită *diferenţiala lui f în t_0*), $\forall h \in \mathbb{R} \rightsquigarrow T(h) = f'(t_0)h \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)-T(t-t_0)}{t-t_0} = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}^m, a \in D$ (deci $\exists\ S(a,r) \subset D$). Este natural să dăm următoarea definiţie:

Definiţie. i) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă în punctul a* dacă există un operator liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$(D) \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

ii) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă pe D* dacă este diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţie. i) Notând $x - a = h$, (D) se poate scrie sub forma echivalentă

$$(D') \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{||h||} = 0.$$

ii) Notând $\alpha(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{||x-a||}, x \in D, x \neq a \\ 0, x = a \end{cases}$, atunci (D) se poate scrie sub forma echivalentă: $\forall x \in D$,

$$(D'')\ F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||,$$

unde $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\alpha(a)=0$, sau, echivalent,

$$(D''')\ F(a+h)=F(a)+T(h)+\alpha(a+h)\cdot||h||,$$

$\forall h\in\mathbb{R}^n$, cu $a+h\in D$ şi $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(a+h)=\alpha(a)=0$.

Definiţie. Numim *diferenţiala funcţiei F în punctul a*, aplicaţia liniară $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, T\overset{not}{=}dF(a), \forall h\in\mathbb{R}^n \rightsquigarrow dF(a)(h)\in\mathbb{R}^m$ (diferenţiala lui F în punctul a calculată în h).

Observaţie. Dacă $m=1, n=1$, se obţine definiţia diferenţiabilităţii (care echivalează cu definiţia derivabilităţii) pentru funcţii reale de o variabilă reală.

Teoremă. *Dacă există, diferenţiala unei funcţii într-un punct este unică.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi operatori liniari diferiţi $T,S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{||x-a||}=0$ şi $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)-S(x-a)}{||x-a||}=0$. Atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{(T-S)(x-a)}{||x-a||}=0$, adică, echivalent, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(T-S)(h)}{||h||}=0$ $(*)$.

Pe de altă parte, deoarece $T\neq S$, există $h_0\in\mathbb{R}^n$ $(h_0\neq 0)$ aşa încât $T(h_0)\neq S(h_0)$.

Din $(*)$ rezultă în particular că $\lim\limits_{t\to 0,t>0}\frac{(T-S)(th_0)}{||th_0||}=0$, deci $\lim\limits_{t\to 0,t>0}\frac{(T-S)(h_0)}{||h_0||}=\frac{(T-S)(h_0)}{||h_0||}=0$, de unde $T(h_0)=S(h_0)$, contradicţie.

Condiţii necesare de diferenţiabilitate.

Teoremă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi continuitate*). *Orice funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenţiabilă într-un punct $a\in D$ este continuă în a.*

(Prin urmare, dacă o funcţie nu este continuă într-un punct, nu este nici diferenţiabilă în acel punct).

Demonstraţie. Deoarece F este diferenţiabilă în a, există un operator liniar $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie $\alpha:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, cu $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\alpha(a)=0$, astfel încât $\forall x\in D$, $F(x)=F(a)+T(x-a)+\alpha(x)\cdot||x-a||$, de unde, întrucât operatorul liniar T este continuu, avem $\lim\limits_{x\to a}F(x)=F(a)$, adică F este continuă în a.

Observaţie. Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată: există funcţii continue într-un punct, care nu sunt diferenţiabile în punctul respectiv, după cum se va vedea într-un exemplu următor.

Teoremă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea după o direcţie*). *Dacă* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă în* $a \in D$, *atunci* f *este derivabilă în* a *după orice direcţie* $u \neq 0$ *şi* $df(a)(u) = \frac{df}{du}(a)$.

Demonstraţie. Deoarece $a \in D$ şi D este mulţime deschisă, $\exists S(a, r) \subset D$.
$\forall u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \exists \delta = \frac{r}{||u||}$ astfel încât $\forall t \in \mathbb{R}$, cu $|t| < \delta, a + tu \in S(a, r) \subset D$.
Prin urmare, deoarece f este diferenţiabilă în $a \in D$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{T(tu) + \alpha(a + tu) \cdot ||tu||}{t} = \lim_{t\to 0}(T(u) + \frac{|t|}{t} \cdot \alpha(a + tu) \cdot ||u||) = \\ &= T(u) = df(a)(u)\end{aligned}$$

există şi este finită, deci f este derivabilă în a după u şi $df(a)(u) = \frac{df}{du}(a)$.

Observaţie. Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (aşa cum am văzut deja, există funcţii derivabile după orice vector nenul, dar care nu sunt continue, deci nici diferenţiabile într-un punct).

Consecinţă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea parţială*). Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a \in D$, atunci f este derivabilă parţial în raport cu orice variabilă în a şi

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i, \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, f este derivabilă în a după orice direcţie $u \neq 0$, deci şi după versorii bazei canonice. Există aşadar $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}$ şi $df(a)(e_i) = \frac{df}{de_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Atunci $\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(a)(h) = df(a)(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} df(a)(e_i)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i.$$

Observaţie. Prin urmare,

$$T(x - a) = df(a)(x - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Observaţie. Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată:
Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Vom arăta că deşi funcţia f este continuă şi admite derivate parţiale în $(0, 0)$, nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că f este diferenţiabilă în $(0, 0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$, contradicţie, deoarece ultima limită nu există.

Condiţii suficiente de diferenţiabilitate.

După cum am remarcat, continuitatea unei funcţii, ca de altfel nici derivabilitatea sa parţială într-un punct nu garanteaza diferenţiabilitatea funcţiei în punctul respectiv. Totuşi, aşa cum vom demonstra în cele ce urmează, existenţa derivatelor parţiale pe o vecinătate a unui punct şi continuitatea acestora în punct antrenează diferenţiabilitatea funcţiei în punctul respectiv:

Teoremă (criteriu de diferenţiabilitate). *Fie* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. *Dacă* f *este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe o vecinătate deschisă* $V = V(a) \subset D$ *şi dacă toate derivatele sale parţiale sunt continue în* a, *atunci* f *este diferenţiabilă în* a.

Demonstraţie. Pentru uşurinţa scrierii, vom presupune că $n = 3$. Deci $a = (a_1, a_2, a_3)$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $V(a) = S(a, r) \subset D$.

Considerăm $x = (x_1, x_2, x_3) \in S(a, r)$ oarecare. Avem:

$f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) =$

$= [f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3)] + [f(a_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, x_3)] + [f(a_1, a_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3)]$.

Observăm că $(a_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, x_3) \in S(a, r) \subset D$, deci scrierea de mai sus este corectă.

Fie $\varphi(t) = f(t, x_2, x_3), \forall t \in [a_1, x_1]$ (sau $[x_1, a_1]$). Deoarece f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe $S(a, r)$, rezultă că funcţia de o variabilă φ este derivabilă, deci şi continuă pe $[a_1, x_1]$ (sau $[x_1, a_1]$). Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei φ, $\exists \xi_1 \in (a_1, x_1)$ (sau (x_1, a_1)) astfel încât $f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi_1)(x_1 - a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3)(x_1 - a_1)$.

Similar, $\exists \xi_2 \in (a_2, x_2)$ (sau (x_2, a_2)), $\exists \xi_3 \in (a_3, x_3)$ (sau (x_3, a_3)) astfel încât în final avem

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,x_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3)(x_2-a_2)+\\
+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,\xi_3)(x_3-a_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)(x_2-a_2)+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)(x_3-a_3)+\\
&+\{\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,x_3)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_1(x)}(x_1-a_1)+\\
&+\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_2(x)}(x_2-a_2)+\\
&+\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,\xi_3)-\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_3(x)}(x_3-a_3)\}.
\end{aligned}
$$

Dacă $x=(x_1,x_2,x_3)\to a=(a_1,a_2,a_3)$, atunci $x_1\to a_1, x_2\to a_2, x_3\to a_3$, de unde $\xi_1\to a_1,\xi_2\to a_2,\xi_3\to a_3$.

Folosind continuitatea derivatelor parţiale în (a_1,a_2,a_3), rezultă că $\lim\limits_{x\to a}\alpha_i(x)=0, \forall i=\overline{1,3}$, şi, ţinând seama că $\frac{x_i-a_i}{||x-a||}$ este mărginit, $\forall i=\overline{1,3}$, rezultă că $\lim\limits_{(x_1,x_2,x_3)\to(a_1,a_2,a_3)}\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)-[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)(x_2-a_2)+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)(x_3-a_3)]}{||(x_1,x_2,x_3)-(a_1,a_2,a_3)||}=0.$

Prin urmare, f este diferenţiabilă în a.

Definiţie. Fie $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Spunem că f *este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f\in\mathcal{C}^1(D)$) dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe D şi toate derivatele sale parţiale sunt continue pe D.

Consecinţă. Dacă $f\in\mathcal{C}^1(D)$, atunci f este diferenţiabilă pe D.

Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (vezi probleme propuse).

Teoremă *(de reducere la componente pentru funcţii vectoriale). O funcţie* $F=(f_1,f_2,...,f_m):D_{deschis}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *este diferenţiabilă în* $a\in D$ *dacă şi numai dacă toate funcţiile componente* $f_1,f_2,...,f_m:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *sunt diferenţiabile în* a*. Mai mult, diferenţierea se face pe componente:*

$$dF(a)(h)=(df_1(a)(h),df_2(a)(h),...,df_m(a)(h)),\forall h\in\mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. $F=(f_1,f_2,...,f_m)$ este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă există un operator liniar $T=(t_1,t_2,...,t_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, cu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât $\forall x \in D$, $F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||$, adică, echivalent, $\forall x \in D$,

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(a) + t_1(x-a) + \alpha_1(x) \cdot ||x-a|| \\ f_2(x) = f_2(a) + t_2(x-a) + \alpha_2(x) \cdot ||x-a|| \\ \quad ... \\ f_m(x) = f_m(a) + t_m(x-a) + \alpha_m(x) \cdot ||x-a||, \end{cases}$$

unde aplicaţiile $t_1, t_2, ..., t_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt liniare şi $\lim\limits_{x\to a} \alpha_i(x) = \alpha_i(a) = 0, \forall i = \overline{1,m}$.

Aceasta înseamnă că, echivalent, $\forall i = \overline{1,m}$, f_i este diferenţiabilă în a.

În plus, $T = dF(a) = (t_1, t_2, ..., t_m) = (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))$.

Exemplu. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x,y) = (x^2y, xy + y^2, x^3 - 2)$. Să calculăm $dF(1,2)(h_1, h_2)$, unde $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ este oarecare.

Fie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = x^2y, f_2(x,y) = xy + y^2, f_3(x,y) = x^3 - 2$.

Evident, $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, deci sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$ şi în consecinţă F este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$df_1(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2)h_2 = 4h_1 + h_2$,

$df_2(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2)h_2 = 2h_1 + 5h_2$,

$df_3(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,2)h_2 = 3h_1$,

de unde $dF(1,2)(h_1,h_2) = (4h_1 + h_2, 2h_1 + 5h_2, 3h_1)$.

Operaţii cu funcţii diferenţiabile.

Propoziţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă.

i) Dacă $F, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci:

a) $F + G$ este diferenţiabilă în a şi

$$d(F+G)(a) = dF(a) + dG(a);$$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda F$ este diferenţiabilă în a şi $d(\lambda F)(a) = \lambda dF(a)$;

ii) Dacă $F : D \to \mathbb{R}, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci FG este diferenţiabilă în a şi

$$d(F \cdot G)(a) = F(a) \cdot dG(a) + G(a) \cdot dF(a).$$

Demonstraţie. i) a) Fie $T = dF(a)$ şi $S = dG(a)$.

Avem: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)-T(h)}{||h||} = 0$ şi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{G(a+h)-G(a)-S(h)}{||h||} = 0$, de unde $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(F+G)(a+h)-(F+G)(a)-(T+S)(h)}{||h||} = 0$, deci concluzia are loc, deoarece $T + S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de asemenea operator liniar.

b) se raţionează asemănător.

ii) Din ipoteză, există $\alpha : D \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât $\forall x \in D$, $F(x) = F(a) + dF(a)(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||$ şi există $\beta : D \to \mathbb{R}^m$, cu

$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\beta(a)=0$, astfel încât $\forall x\in D$, $G(x)=G(a)+dG(a)(x-a)+\beta(x)\cdot ||x-a||$.

$T=dF(a)$ şi $S=dG(a)$ sunt operatori liniari, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

Atunci $\forall x\in D\backslash\{a\}$,

$$\begin{aligned}
(F\cdot G)(x) &= F(x)\cdot G(x)= \\
&= (F(a)+T(x-a)+\alpha(x)\cdot ||x-a||)\cdot \\
\cdot(G(a)+S(x-a)+\beta(x)\cdot ||x-a||) &= \\
&= (F\cdot G)(a)+[F(a)\cdot S+G(a)\cdot T](x-a)+ \\
&\quad +||x-a||\gamma(x),\ \text{unde}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(x) &= G(a)\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot S(x-a)+||x-a||\cdot\alpha(x)\cdot\beta(x)+ \\
&\quad +F(a)\cdot\beta(x)+\beta(x)\cdot T(x-a)+\frac{T(x-a)\cdot S(x-a)}{||x-a||}.
\end{aligned}$$

Deoarece $F(a)\cdot\overbrace{dG(a)}^{=S}+\overbrace{dF(a)}^{=T}\cdot G(a)$ este un operator liniar, rămâne să arătăm că $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=0$. Într-adevăr, deoarece orice operator liniar este continuu, avem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\gamma(x) &= G(a)\cdot\lim_{x\to a}\alpha(x)+F(a)\cdot\lim_{x\to a}\beta(x)+ \\
&\quad +\lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot S(x-a)+\beta(x)\cdot T(x-a)+ \\
&\quad +\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot ||x-a||]+ \\
+\lim_{x\to a}\frac{T(x-a)\cdot S(x-a)}{||x-a||} &= \\
&= \lim_{x\to a}T(x-a)\cdot\frac{S(x-a)}{||x-a||}=0,
\end{aligned}$$

deoarece $\lim\limits_{x\to a}T(x-a)=T(0)=0$, iar $||\frac{S(x-a)}{||x-a||}||=\frac{||S(x-a)||}{||x-a||}\le L$ (S fiind operator liniar, deci funcţie lipschitziană).

Matrice jacobiană

Fie acum $F=(f_1,f_2,...,f_m):D_{deschis}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenţiabilă în punctul $a\in D$. Atunci $\forall i=\overline{1,m}$, $f_i:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în $a\in D$.

Introducem matricea asociată diferenţialei $T=dF(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (care este operator liniar) a funcţiei F în punctul $a\in D:$

$$J_F(a)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a)\\ & ... & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

numită *matricea jacobiană a funcţiei F în punctul a.*
(denumirea este dată în onoarea matematicianului german Carl Jacobi).
Evident, dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $J_f(a) = f'(a)$.
În situaţia în care $m = n$, $J_F(a)$ este matrice pătratică, iar

$$\det J_F(a) = \frac{D(f_1, \dots f_n)}{D(x_1, \dots x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \ \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \ \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) \ \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul jacobian (jacobianul) (determinantul funcţional) al lui F în a.*

Exemple.
1) Coordonate polare.

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta), \forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$.

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în plan: $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta, \end{cases} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta) = \rho \cos\theta, f_2(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$.

$$J_F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\det J_F(\rho, \theta) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho.$$

2) Coordonate cilindrice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele cilindrice în spaţiu.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta, z) = \rho \cos\theta, f_2(\rho, \theta, z) = \rho \sin\theta, f_3(\rho, \theta, z) = z$.

$$J_F(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det J_F(\rho,\theta,z) = \frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) =$ $\rho.$

Probleme propuse.

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Arătaţi că funcţia f *este continuă şi admite derivate parţiale în* $(0,0)$, *dar nu este diferenţiabilă în* $(0,0)$.

ii) Arătaţi că funcţia f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că f *este diferenţiabilă pe* $\mathbb{R}^2$, *dar nu este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* $\mathbb{R}^2$.

3. Studiaţi diferenţiabilitatea pe $\mathbb{R}^2$ a funcţiilor următoare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

i) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

ii) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0); \end{cases}$

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0); \end{cases}$

v) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. Pornind de la definiţie, arătaţi ca funcţia $f(x,y) = x^3+xy+y^2$ este diferenţiabilă în $(1,1)$. Cum se poate stabili altfel, mai simplu, acest rezultat?

Este funcţia diferenţiabilă şi în rest?

5. Dacă $a \in \mathbb{R}^n$, iar $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este, pe rând:

a) o funcţie constantă;

b) un operator liniar,

arătaţi că F este diferenţiabilă şi calculaţi $dF(a)$.

6. Fie $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x,y) = (x^2y, xy+y^2, x^3-2)$. Scrieţi $J_F(1,2)$.

7. Arătaţi că funcţia $f : S((0,0),r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ îndeplinind condiţia $|f(x,y)| \leq x^2+y^2, \forall (x,y) \in S((0,0),r)$, este diferenţiabilă în $(0,0)$.

8. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Studiaţi:

i) diferenţiabilitatea lui f în $(0,0)$;

ii) continuitatea în $(0,0)$ pentru funcţia $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$.

9. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$. Arătaţi că f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

10. Cercetaţi dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ este diferenţiabilă în $(0,0)$.

11. Studiaţi dacă derivatele parţiale mixte de ordin 2 în $(0,0)$ coincid pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Cercetaţi dacă funcţia este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

12. Scrieţi matricea jacobiană şi calculaţi determinantul (dacă este posibil) pentru următoarele funcţii vectoriale:
i) $F(x,y) = (x^2 + y^2, xy), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
ii) $F(x,y) = (x + \cos y, y \sin x), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
iii) $F(x,y) = (xe^y, e^{xy}, y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
iv) $F(x,y,z) = (x^2 + z^2, y^2 + z^2), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x\cos(y \sin z)$. Motivaţi diferenţiabilitatea funcţiei f şi, în caz afirmativ, calculaţi $df(0, \frac{\pi}{2}, \pi)$.

3) Coordonate sferice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)$.

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în spaţiu: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}, \rho > 0, \varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi \cos\theta, f_2(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi \sin\theta, f_3(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\varphi$.

$J_F(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & \rho \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$

$\det J_F(\rho, \varphi, \theta) = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & \rho \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi$.

Teoremă *(a diferenţiabilităţii compuse) (legea lanţului) Fie* $F : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^m, G : \Delta \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in D$. *Dacă F este diferenţiabilă în a şi G este diferenţiabilă în $b = F(a) \in \Delta$, atunci aplicaţia compusă $G \circ F : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi*

$$d(G \circ F)(a) = dG(F(a)) \circ dF(a).$$

Demonstraţie. Deoarece F este diferenţiabilă în a, $\exists$ un operator liniar $T = dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^m$ aşa ca $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$ şi $\forall x \in D, F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||$.

Analog, deoarece G este diferenţiabilă în $b = F(a)$, $\exists$ un operator liniar $S = dG(b) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ şi o funcţie $\beta : \Delta \to \mathbb{R}^p$ aşa ca $\lim\limits_{y \to b} \beta(y) = \beta(b) = 0$ şi $\forall y \in \Delta, G(y) = G(b) + S(y-b) + \beta(y) \cdot ||y-b||$.

Pentru orice $x \in D$, fie $y = F(x)$. Prin urmare, $\forall x \in D$, $(G \circ F)(x) = (G \circ F)(a) + S(F(x) - F(a)) + \beta(F(x))||F(x) - F(a)||$, de unde

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(a) + (S \circ T)(x-a) + ||x-a||S(\alpha(x)) + \\ &+ \beta(F(x))||T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||||. \end{aligned}$$

Fie $\gamma(x) = \begin{cases} S(\alpha(x)) + \beta(F(x)) \cdot \frac{||T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||||}{||x-a||}, x \in D \backslash \{a\} \\ 0, x = a. \end{cases}$

Deoarece $S \circ T = dG(F(a)) \circ dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este operator liniar, rămâne de arătat că $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$.

Într-adevăr, avem: $\lim\limits_{x \to a} S(\alpha(x)) = S(0) = 0$ (S este operator liniar, deci continuu). De asemenea,

$$\frac{||T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||||}{||x-a||} \leq \frac{||T(x-a)||}{||x-a||} + ||\alpha(x)|| \leq L + 1$$

(orice operator liniar este funcţie lipschitziană iar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$). În plus, $\lim\limits_{x\to a}\beta(F(x)) = 0$ (deoarece $\lim\limits_{y\to b}\beta(y) = \beta(b) = \beta(F(a)) = 0$ şi F este diferenţiabilă, deci continuă în a).

Prin urmare, $G \circ F : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi, mai mult, $d(G \circ F)(a) = dG(F(a)) \circ dF(a) = S \circ T$.

Consecinţa 1. În condiţiile teoremei anterioare,

$$\underbrace{J_{G\circ F}(a)}_{\in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})} = \underbrace{J_G(F(a))}_{\in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{J_F(a)}_{\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat folosind teorema anterioară, faptul că matricea jacobiană este de fapt matricea asociată diferenţialei în punct (care este operator liniar) şi faptul că dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sunt aplicaţii liniare, atunci $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este aplicaţie liniară şi $A_{S\circ T} = A_S \cdot A_T$.

Observaţie. Formula anterioară exprimă concentrat toate regulile posibile de derivare (parţială) compusă pe care le vom obţine prin particularizări convenabile. Derivatele parţiale compuse se utilizează în teoremele ecuaţiilor cu derivate parţiale, la transformarea ecuaţiilor diferenţiale prin schimbări de variabile etc.

Consecinţa 2. În condiţiile teoremei anterioare, dacă în particular $m = n = p$, $F = (f_1, f_2, ..., f_n), G = (g_1, g_2, ..., g_n), H = G \circ F = (h_1, h_2, ..., h_n)$, unde $h_i(x_1, x_2, ..., x_n) = g_i(\underbrace{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_1}, \underbrace{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_2}, ..., \underbrace{f_n(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_n}), \forall i = \overline{1, n}$, atunci

$$\frac{D(h_1, h_2, ..., h_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, ..., g_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}(b) \cdot \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a).$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat trecând la determinanţi în consecinţa anterioară şi folosind faptul că determinantul produsului a două matrici este egal cu produsul determinanţilor matricilor.

Consecinţa 3. Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R} \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2, f(t) = (u(t), v(t)), \forall t \in D, g : \Delta \to \mathbb{R}$. Dacă f este diferenţiabilă pe D şi g este diferenţiabilă pe Δ, atunci $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}, h(t) = g(f(t)) = g(u(t), v(t))$ este derivabilă pe D şi

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(t), v(t)) \cdot v'(t), \forall t \in D.$$

Demonstraţie. Din Consecinţa 1, avem $J_h(t) = J_g(f(t)) \cdot J_f(t)$, ceea ce antrenează $h'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot v'(t), \forall t \in D$.

Consecinţa 4. Fie $F : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2, F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \forall (x, y) \in D, G : \Delta \to \mathbb{R}$.

Dacă F este diferenţiabilă pe D şi G este diferenţiabilă pe Δ, atunci $H = G \circ F : D \to \mathbb{R}, H(x,y) = G(F(x,y)) = G(u(x,y), v(x,y))$ este diferenţiabilă pe D şi

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \forall (x,y) \in D.$$

Demonstraţie. Din Consecinţa 1, avem $J_H(x,y) = J_G(F(x,y)) \cdot J_F(x,y)$, ceea ce antrenează $\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \forall (x,y) \in D$, de unde concluzia.

TEOREMA LUI SCHWARZ. TEOREMA LUI YOUNG.

Aşa cum am observat anterior, nu este neapărat obligatoriu ca derivatele parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct să coincidă.

Totuşi, în cele ce urmează, vom indica două condiţii suficiente diferite care asigură egalitatea derivatelor parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct.

Teorema lui Schwarz. *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. *Dacă* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (i, j = \overline{1,n}, i \neq j) \exists$ *şi sunt finite pe o întreagă vecinătate deschisă* $V = V(a) \subset D$ *şi dacă sunt continue în* a, *atunci* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Observaţie. *Condiţiile din Teorema lui Schwarz sunt suficiente, dar nu neapărat necesare*:

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(1 + \frac{x^2}{y^2}), y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$.

Derivatele parţiale mixte de ordinul 2 ale lui f nu sunt continue în $(0,0)$ şi totuşi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Definiţie. Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că:

i) f *este de clasă* $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^k(D)$) dacă f este parţial derivabilă de ordin k (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate aceste derivate parţiale de ordin k sunt continue pe D;

ii) f *este de clasă* $\mathcal{C}^\infty$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$) dacă $f \in \mathcal{C}^k(D), \forall k \geq 0$.

Consecinţă. Din Teorema lui Schwarz rezultă că dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Teorema lui Young. *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. *Dacă* f *este derivabilă parţial (în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate deschisă*

$V = V(a) \subseteq D$ *a punctului* a *şi dacă toate derivatele parţiale* $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ *sunt diferenţiabile în* a*, atunci* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j.$

Consecinţă. Dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Interpretarea geometrică a diferenţialei.

Amintim pentru $n = 1$, interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct:

dreapta de ecuaţie $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ este tangenta în $(x_0, f(x_0)$ la graficul funcţiei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile în punctul $x_0 \in D$.

Vom prezenta în cele ce urmează interpretarea geometrică a diferenţialei unei funcţii de două variabile:

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în $(x_0, y_0) \in D$. Atunci graficul său admite un plan tangent în punctul $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de ecuaţie

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR**.**

Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă într-un punct $a \in D$ şi $\forall i = \overline{1,n}$, fie $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow pr_i(h) = h_i \in \mathbb{R}$ (aplicaţiile de proiecţie).

Întrucât $df(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$, rezultă că $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) pr_i$.

Dar aplicaţiile de proiecţie fiind în mod evident operatori liniari, avem $d(pr_i)(a) = pr_i, \forall i = \overline{1,n}$, deci $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \underbrace{d(pr_i)(a)}_{\overset{not.\ (\text{prin convenţie})}{=} dx_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$,

sau, scris funcţional,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Particularizări:

1) $n = 2 : df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy; df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) dy,$
$df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) h_2;$

2) $n = 3 : df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz;$
$df(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3) dz,$
$df(a_1, a_2, a_3)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3) h_3.$

Definiţie. Spunem că f este *de 2 ori diferenţiabilă în* $a \in D$ dacă f este diferenţiabilă (deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate deschisă $V = V(a) \subseteq D$ şi toate derivatele parţiale (de ordinul I) sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordinul II a lui f în punctul* a, funcţia $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ prin

$$d^2f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{(=a_{ij})}h_ih_j(=(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i)^{(2)}),$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la "puterea" a doua după o formulă clasică de tip "binomial", în care "puterea" semnifică ordinul de derivare.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j = \overline{1,n}$ (datorită Criteriului lui Young), rezultă că $d^2f(a)$ este o formă pătratică, iar matricea asociată acestei forme pătratice este

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & ... & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

numită *matricea hessiană asociată funcţiei f în punctul a.*

Observăm că este o matrice pătratică simetrică.

1) Dacă f este funcţie de două variabile, atunci

$$\begin{aligned} d^2f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1h_2, \end{aligned}$$

$$d^2f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)dxdy,$$

2) Dacă f este funcţie de trei variabile, atunci

$$\begin{aligned} d^2f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + h_3\frac{\partial f}{\partial z}(a))^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)h_3^2 + \\ &\quad +2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1h_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)h_2h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a)h_1h_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)dz^2 + \\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)dxdz. \end{aligned}$$

Definiţie. Fie $a \in D$ şi $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) în a* dacă f este diferenţiabilă de $(q-1)$ ori pe o vecinătate deschisă $V = V(a) \subseteq D$ şi toate derivatele parţiale de ordin $(q-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordin q a lui f în punctul a,* aplicaţia $d^q f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită pentru $\forall h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, prin

$$d^q f(a)(h) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i)^{(q)},$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la "puterea" simbolică q după o formulă clasică de tip binomial, în care "puterea" exprimă ordinul de derivare.

ii) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) pe D* dacă f este de q ori diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţie. i) La fel ca pentru cazul $q = 2$, din Teorema lui Young rezultă că derivatele parţiale mixte pereche de ordin $\leq q$ sunt egale (în a).

ii) Dacă $n = 2, q = 3$, $(a = (a_1, a_2), h = (h_1, h_2))$ atunci

$$\begin{aligned} d^3 f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(3)} = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)h_2^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)h_1^2h_2 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)h_1h_2^2, \end{aligned}$$

$$d^3 f(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)dy^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)dx^2dy + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)dxdy^2.$$

FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE.

Să reamintim pentru început formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin q pentru funcţii reale de o singură variabilă reală.

Teoremă (Taylor). Presupunem că $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este de $(q+1)$ ori derivabilă pe I. Atunci $\forall x \in I, \exists c \in (a, x)$ (sau (x, a)) astfel încât

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^q+\underbrace{\frac{f^{(q+1}(c)}{(q+1)!}(x-a)^{q+1}}_{\text{rest Lagrange de ordin q}}.$$

Teoremă (Taylor). Presupunem că $D\subseteq\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, $a\in D$ $(\exists S(a,r)\subseteq D))$ şi $f:D\to\mathbb{R}$ este de $(q+1)$ ori diferenţiabilă pe $S(a,r)$. Atunci $\forall x\in S(a,r),\exists\xi\in(a,x)$ (sau (x,a))(segmentul deschis din $\mathbb{R}^n$ de capete a,x) astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\frac{1}{1!}df(a)(x-a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a)+...+\frac{1}{q!}d^qf(a)(x-a)+ \\ &\quad +\underbrace{\frac{1}{(q+1)!}d^{(q+1)}f(\xi)(x-a)}_{\text{rest Lagrange de ordin q}}. \end{aligned}$$

Probleme propuse.

1. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x}):xf'_x+yf'_y=0$;

ii) $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2):xy^2f'_x+x^2yf'_y=(x^2+y^2)f$;

iii) $f(x,y)=xy+x\varphi(\frac{y}{x}):xf'_x+yf'_y=xy+f$.

2. Arătaţi că funcţia $f(x,y)=\varphi(x-ay)+\psi(x+ay)$, unde funcţiile φ,ψ admit derivate parţiale de ordin II, satisface ecuaţia $f''_{y^2}=a^2f''_{x^2}$.

3. Arătaţi că funcţia $u=\frac{1}{\sqrt{y}}f(4x+\frac{z^2}{y})$ verifică relaţia $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$.

4. Arătaţi că funcţia $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ verifică relaţia $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

5. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru:
i) $f(u,v)=\ln(u^2+v),u=u(x,y)=e^{x+y^2},v=v(x,y)=x^2+y$;
ii) $f(u,v)=arctg\frac{u}{v},u=u(x,y)=x\sin y,v=v(x,y)=x\cos y$.

6. Arătaţi că dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă, atunci funcţia $w=f(x+y,x-y)$ are derivate parţiale ce verifică relaţia $\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$, unde $u=u(x,y)=x+y,v=v(x,y)=x-y$.

7. Calculaţi $f'(x)$ dacă $f(x)=\varphi(u(x),v(x))$, pentru:
i) $\varphi(u,v)=u+uv,u=u(x)=\cos x,v=v(x)=\sin x$;
ii) $\varphi(u,v)=e^{u-2v},u=u(x)=x^2,v=v(x)=x^2-2$.

8. Cercetaţi dacă funcţia $f(x,y)=e^y\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ verifică relaţia $(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}=xyf$.

9. Cercetaţi dacă funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f(x,y)=x\varphi(x+y)+y\psi(x-y):\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0;$
ii) $f(x,y)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\psi(\frac{y}{x}):x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

10. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(1+\frac{x^2}{y^2}), y\neq 0\\ 0, y=0\end{cases}$.
Arătati că:
i) derivatele parţiale mixte de ordinul 2 ale lui f nu sunt continue în $(0,0)$;
ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

11. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=x\cos(y\sin z)$. Motivaţi diferenţiabilitatea funcţiei f şi, în caz afirmativ, calculaţi $df(0,\frac{\pi}{2},\pi)$.

12. a) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^x\cos y$ şi fie (x_0,y_0) arbitrar. Calculaţi $df(x_0,y_0), d^2f(x_0,y_0), df(x_0,y_0)(h_1,h_2), d^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2)$, $d^3f(x_0,y_0), d^3f(x_0,y_0)(h_1,h_2)$, unde $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ este oarecare.
b) Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=e^x\sin y\cos z$ şi fie (x_0,y_0,z_0) arbitrar. Calculaţi $df(x_0,y_0,z_0), d^2f(x_0,y_0,z_0), df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3), d^2f(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)$, unde $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$ este oarecare.

13. Folosind formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2, calculaţi valoarea aproximativă pentru:
i) $(0,95)^{2,01}$; ii) $(1,02)^{3,01}$; iii) $\sqrt{1,03}\cdot\sqrt[3]{0,98}$.

14. Scrieţi formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2 pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^x\sin y$ în $(0,0)$.

15. Justificaţi aproximarea $arctg(\frac{x+y}{1+xy})\simeq x+y$, în vecinătatea lui $(0,0)$.

Puncte de extrem pentru funcţii reale de mai multe variabile reale.

Definiţie. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Un punct $a \in A$ se numeşte *punct de extrem local pentru* f dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pe o vecinătate a lui a, adică, $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) - f(a)$ păstrează acelaşi semn, $\forall x \in V \cap A$.

Mai precis,

dacă $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de minim local pentru* f, iar

dacă $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de maxim local pentru* f.

ii) Dacă $f(x) - f(a) \geq 0$, (respectiv, $f(x) - f(a) \leq 0$), $\forall x \in A$, atunci a se numeşte *punct de minim (*respectiv*, de maxim) absolut pentru* f.

Nu întotdeauna există pentru o funcţie puncte de minim (maxim) absolut.

iii) Valorile funcţiei în punctele de extrem se numesc *extremele funcţiei.*

Dacă există, $f(a) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ (respectiv, $f(b) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$) se numeşte *valoare minimă* (respectiv, *maximă*) *a lui* f *pe* A.

De exemplu, dacă A este mulţime compactă şi f este continuă pe A, atunci Teorema lui Weierstrass ne asigură că există valoarea minimă şi valoarea maximă a lui f pe A.

Condiţii necesare de extrem.

Teoremă (a lui Fermat). *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D$. *Dacă* f *este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele în punctul* a, *iar* a *este punct de extrem local pentru* f, *atunci* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. Afirmaţia este imediată aplicând Teorema lui Fermat funcţiei parţiale (reale de o variabilă reală) derivabile $x_i \rightsquigarrow f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n), i = \overline{1, n}$.

Definiţie. Spunem că $a \in D$ este *punct critic* (sau *staţionar*) pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în a) dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Aşadar, Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile, se găsesc printre punctele sale critice. Aşa cum vom observa în exemplul următor, incluziunea este strictă (reciproca nu are loc).

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$.

Să determinăm pentru început punctele sale critice, rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, obţinem unicul punct critic $M(0, 0)$, care nu este însă nici punct de minim, nici punct de maxim local deoarece nu există nici

o vecinătate a originii pe care diferenţa $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ să păstreze semn constant.

Punctul $(0,0)$ se numeşte *punct şa (punct critic care nu este punct de extrem).*

Folosind formula lui Taylor se demonstrează următorul rezultat:

Teoremă. *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$. *Dacă* $a \in D$ *este punct de minim local (respectiv, maxim local) pentru* f *(deci* $df(a) = 0$*), atunci* $d^2 f(a) \geq 0$ *(respectiv,* $d^2 f(a) \leq 0$*).*

În continuare, vom pune în evidenţă **condiţii suficiente** pentru ca un punct critic să fie punct de extrem.

Lemă. Fie $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice simetrică de numere reale ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j = \overline{1,n}$) şi $\varphi(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)$), forma pătratică asociată. Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$), atunci $\exists \lambda > 0$ astfel încât $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie $S = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\} = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$. S este mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.

Întrucât funcţia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie polinomială în $x_1, x_2, ..., x_n$, rezultă că este continuă pe mulţimea compactă S, deci conform Teoremei lui Weierstrass îşi atinge marginea inferioară. $\exists\ \xi \in S$ (deci $\xi \neq 0_n$) astfel ca $\lambda = \inf\limits_{x \in S} \varphi(x) = \varphi(\xi)$.

Deoarece φ este pozitiv definită, rezultă că $\lambda > 0$. Prin urmare, $\varphi(x) \geq \lambda > 0, \forall x \in S$.

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrar. Dacă $x = 0_n$, atunci evident $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2 = 0$.

Dacă $x \neq 0_n$, atunci $\frac{x}{||x||} \in S$, deci, din consideraţiile anterioare, $\varphi(\frac{x}{||x||}) \geq \lambda$. Dar $\varphi(\frac{x}{||x||}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_i}{||x||} \frac{x_j}{||x||} = \frac{1}{||x||^2} \varphi(x)$, deci $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2$.

Teoremă *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ *şi* $a \in D$ *un punct critic pentru* f.

i) Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ *este pozitiv definită, atunci* a *este punct de minim local pentru* f;

ii) Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ *este negativ definită, atunci* a *este punct de maxim local pentru* f.

Demonstraţie. Deoarece $f \in \mathcal{C}^2(D)$, rezultă că f este de 2 ori diferenţiabilă pe D şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i,j = \overline{1,n}$.

i) Presupunem că forma pătratică $d^2 f(a)$ este pozitiv definită.

Aplicând lema anterioară pentru $\varphi = d^2 f(a)$ şi $y = x - a$, $\exists\ \lambda > 0$ astfel încât $d^2 f(a)(x-a) \geq \lambda ||x-a||^2, \forall x \in D$.

Conform formulei lui Taylor cu rest Lagrange $q = 1$ pentru f în jurul lui a, pentru $\forall x \in S(a,r)(\subset D), \exists \xi \in (a,x)$ (sau (x,a)) astfel ca

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}_{=df(a)(x-a)} + \underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j)}_{=d^2 f(\xi)(x-a)}.$$

Deoarece a este punct critic pentru $f, df(a)(x-a) = 0$, deci $\forall x \in S(a,r)(\subset D)$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}[d^2 f(\xi)(x-a) - d^2 f(a)(x-a)] = \\ &= \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \alpha(x)\cdot ||x-a||^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda}{2}||x-a||^2 + \alpha(x)\cdot||x-a||^2 = (\alpha(x) + \frac{\lambda}{2})\cdot||x-a||^2. \end{aligned}$$

unde $\alpha(x) = \frac{1}{2!}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)]\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{||x-a||^2}, x \neq a$.

Deoarece derivatele parţiale de ordinul II sunt continue în a, $\xi \to a$ dacă $x \to a$, iar $||\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{||x-a||^2}|| \leq 1, \forall i,j = \overline{1,n}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Dar $\lambda > 0$, deci $\exists r' \in (0,r)$ astfel ca $\alpha(x) + \frac{\lambda}{2} > 0, \forall x \in S(a,r')$, de unde $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in S(a,r')(\subset S(a,r) \subset D)$, ceea ce înseamnă că a este punct de minim local pentru f.

ii) Se procedează analog sau se foloseşte i) pentru $-f$.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de 2 variabile.

Teoremă. *Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.*

Fie $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

1) Dacă $B^2 - AC > 0, a$ nu este punct de extrem local pentru f.

2) Dacă $B^2 - AC = 0$, caz de dubiu (nu ne putem pronunţa).

3) Dacă $B^2 - AC < 0$, atunci a este punct de extrem local pentru f. Mai precis,

a) dacă $A > 0$ (sau $C > 0$), a este punct de minim local pentru f;

b) dacă $A < 0$ (sau $C < 0$), a este punct de maxim local pentru f.

Demonstraţie. Fie $a = (a_1, a_2)$ şi $(x,y) \in D$ oarecare. Atunci

$d^2 f(a)(x-a) = (x-a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2) + (y-a_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2) + 2(x-a_1)(y-a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea că, de exemplu, $y \neq a_2$. Atunci

$d^2 f(a)(x-a) = (y-a_2)^2[A(\frac{x-a_1}{y-a_2})^2 + 2B\frac{x-a_1}{y-a_2} + C]$.

Notând $\frac{x-a_1}{y-a_2} = t$, atunci $d^2f(a)$ are semn constant dacă şi numai dacă $B^2 - AC < 0$, semnul trinomului $At^2 + 2Bt + C$ fiind dat de semnul lui A.

Prin urmare, dacă $A > 0$ (respectiv, $A < 0$), atunci $d^2f(a)$ este pozitiv (respectiv, negativ) definită, deci conform teoremei anterioare, a este punct de minim (respectiv, maxim) local pentru f.

Dacă $B^2 - AC > 0$, atunci $d^2f(a)$ nu are semn constant, deci nici diferenţa $f(x) - f(a)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a lui a, ceea ce înseamnă că a nu este punct de extrem.

Dacă $B^2 - AC = 0$, atunci semnul diferenţei $f(x) - f(a)$ depinde de semnul diferenţialelor lui f de ordin superior.

Exemple. 1) Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Determinăm mai întâi punctele critice ale funcţiei, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x, \end{cases}$$

obţinând punctele critice $M_1(0,0)$ şi $M_2(1,1)$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, rezultă că pentru $M_1(0,0)$, avem $B^2 - AC = 9 > 0$, deci nu este punct de extrem, iar pentru $M_1(1,1)$, avem $B^2 - AC < 0$, $A > 0$, deci este punct de minim local pentru f.

2) Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$. Se obţine punctul critic $M(1,1)$, pentru care $B^2 - AC = 0$, deci criteriul nu stabileşte natura sa.

Dacă $M(1,1)$ ar fi punct de extrem local pentru f, ar exista $S((1,1),r_0)$ astfel ca $f(x,y) - f(1,1) \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y) \in S((1,1),r_0)$.

În particular, $f(x,x) - f(1,1) = (x-1)^3 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x) \in S((1,1),r_0)$, fals. Deci $M(1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de n variabile, $n \geq 3$.

Teorema lui Sylvester (din teoria formelor pătratice) *Fie* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *o formă pătratică oarecare* ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j = \overline{1,n}$). *Fie* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ & ... \\ a_{n1} & a_{n2} \ ... \ a_{nn} \end{pmatrix}$ *matricea sa asociată, şi minorii principali* $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ & ... \\ a_{n1} & a_{n2} \ ... \ a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$.

Atunci:

i) φ *este pozitiv definită* $(\varphi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n)$ *dacă şi numai dacă* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$;

ii) φ *este negativ definită* $(\varphi(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n)$ *dacă şi numai dacă* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$.

Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.

Se aplică Teorema lui Sylvester pentru forma pătratică $\varphi = d^2 f(a)$, considerând matricea sa asociată, *matricea hessiană a lui* f *în punctul* a, care este o matrice pătratică, simetrică:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & ... & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

având minorii principali

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & ... & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix}.$$

Obţinem astfel următorul rezultat:

Teoremă *1) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt strict pozitivi, atunci* a *este punct de minim local pentru* f.

2) *Dacă minorii principali ai matricei hessiene alternează ca semn, începând cu primul negativ, atunci* a *este punct de maxim local pentru* f.

3) *Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt nenuli, dar semnele lor nu sunt ca în cazurile 1) sau 2), atunci* a *nu este punct de extrem local pentru* f.

4) *Dacă cel puţin unul din* $\Delta_1, ..., \Delta_n$ *este nul, nu se poate preciza natura punctului* a. *În acest caz, pentru a evalua semnul diferenţei* $f(x) - f(a)$, *se foloseşte definiţia sau formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin superior lui* 2.

Exemple. Să determinăm punctele de extrem local ale funcţiei

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$, obţinem punctul critic $M(0, 0, 0)$.

Apoi, $H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 8 > 0, \Delta_3 = 8 > 0$, deci $M(0,0,0)$ este punct de minim local pentru f.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-1)^3 + (z-1)^2$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$, obţinem punctul critic $M(1,1,1)$.

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de unde $\Delta_2 = 0$, deci criteriul nu stabileşte natura punctului critic. Vom folosi atunci definiţia.

$M(1,1,1)$ este punct de extrem local pentru f dacă şi numai dacă există o sferă $S((1,1,1),r)$ aşa ca $f(x,y,z) - f(1,1,1) = (x-y)^2 + (y-1)^3 + (z-1)^2 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y,z) \in S((1,1,1),r)$.

În particular, $f(x,x,1) = (x-1)^3 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x,1) \in S((1,1,1),r)$, adică, echivalent, $x \geq 1$ (sau $x \leq 1$), $\forall x \in (\frac{-r}{\sqrt{2}} + 1, \frac{r}{\sqrt{2}} + 1)$, fals. Deci $M(1,1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

Teorema funcţiilor implicite (TFI).

Fie ecuaţia *implicită* $F(x,y) = 0$ (termenul "implicit" a fost introdus de Leonard Euler).

Dorim să rezolvăm această ecuaţie, măcar *local*, obţinând *explicit* una dintre variabile funcţie de cealaltă. De exemplu, să obţinem local $y = \varphi(x)$ (la fel se poate pune problema pentru a obţine $x = \psi(y)$.

TFI 1.2. (o ecuaţie cu două necunoscute)
Fie ecuaţia $F(x,y) = 0$, unde $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi fie $(x_0, y_0) \in \Omega$ o soluţie a ecuaţiei.

I. Presupunem că:

i) $F \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{D})$ unde $D = D(x_0, y_0) \subset \Omega$ este un dreptunghi închis cu centrul în (x_0, y_0), caracterizat prin inegalităţile $D : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$;

ii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0) \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ şi $\exists U_{\text{deschisă}} = U(y_0) \subset [y_0 - b, y_0 + b]$ astfel încât $\forall x \in V(x_0)$, ecuaţia are soluţie unică $y = \varphi(x) \in U(y_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi \in \mathcal{C}^1(V(x_0))$ şi derivata sa este dată de formula

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}, \forall x \in V(x_0).$$

Verificarea formulei: $\forall x \in V(x_0), F(x, \varphi(x)) = 0$. Derivând parţial în raport cu x, obţinem $F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, $\forall x \in V(x_0)$, de unde rezultă formula.

II. Dacă i) $F \in \mathcal{C}^k(D), k \geq 1$ şi ii), atunci $\varphi \in \mathcal{C}^k(V(x_0)))$.

Exemplu. Să calculăm $f'(1)$ pentru funcţia $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

Fie $F(x, y) = (x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2$. Deoarece $F(1, 1) = 0$ şi $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, conform TFI avem explicit $y = f(x)$ şi

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{6x(x^2 + f^2(x))^2 - 6x}{6f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - 6f(x)} = -\frac{x(x^2 + f^2(x))^2 - x}{f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - f(x)},$$

de unde $f'(1) = -1$.

TFI 1.3. (o ecuaţie cu trei necunoscute)

Fie ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi fie $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ o soluţie a ecuaţiei. Presupunem că:

i) $F \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{P})$, unde $P = P(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ este un paralelipiped închis cu centrul în (x_0, y_0, z_0), caracterizat prin inegalităţile $P : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$;

ii) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0, y_0) \subset D(x_0, y_0)(: |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b), \exists U_{\text{deschisă}} = U(z_0) \subset [z_0 - c, z_0 + c]$ astfel încât $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$, ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ are soluţie unică $z = \varphi(x, y) \in U(z_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi \in \mathcal{C}^1(V(x_0, y_0))$ şi derivatele sale parţiale sunt date de formulele

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(x, y) &= -\frac{F'_x(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}, \\
\varphi'_y(x, y) &= -\frac{F'_y(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}, \forall (x, y) \in V(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Verificarea formulelor se realizează prin derivare parţială compusă:

$\forall (x, y) \in V(x_0, y_0), F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, de unde $F'_x(x, y, \varphi(x, y))+F'_z(x, y, \varphi(x, y))\cdot \varphi'_x(x, y) = 0$ şi $F'_y(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \varphi'_y(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$.

Exemplu. Dacă funcţia explicită $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuaţia $z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = 0$.

Într-adevăr, fie $F(x, y, z) = (y + z)\sin z - y(x + z)$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ şi $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y}{(y+z)\cos z+\sin z-y}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-\sin z+x+z}{(y+z)\cos z+\sin z-y}$, deci, făcând înlocuirile se verifică relaţia cerută.

TFI 1.n. (o ecuaţie cu n necunoscute) se rezolvă recursiv.

Fie $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, unde $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o soluţie a acestei ecuaţii fiind $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \Omega$.

Presupunând că $F \in \mathcal{C}^1, F'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \neq 0$, obţinem local $x_n = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, ceea ce antrenează $F(x_1, x_2, ...x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) = 0$, deci o ecuaţie cu $n-1$ necunoscute etc.

TFI. 2.3. (două ecuaţii cu trei necunoscute) *Fie* $F, G : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *şi* $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ *o soluţie a sistemului* (1) $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$. *Presupunem că:*

i) $F, G \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{P})$, *unde* $P = P(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ *este un paralelipiped închis cu centrul în* (x_0, y_0, z_0), *caracterizat prin* $P : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$.

ii) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0) \subset [x_0 - a, x_0 + a], \exists U_{\text{deschisă}} = U(y_0, z_0) \subset D(y_0, z_0)(: |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c)$ *astfel încât* $\forall x \in V(x_0)$, *sistemul* (1) *are soluţie unică* $(y, z) \in U(y_0, z_0) : y = \varphi(x), z = \psi(x)$, *şi funcţiile soluţie* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(V)$.

$\varphi'(x)$ şi $\psi'(x)$ se obţin prin derivare parţială compusă în raport cu x în sistemul $\begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}$, $\forall x \in V(x_0)$, de unde

$$\begin{cases} F'_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + F'_y(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + F'_z(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \\ G'_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + G'_y(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + G'_z(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \end{cases},$$

rezultând în final $\varphi'(x)$ şi $\psi'(x), x \in V(x_0)$.

Exemplu. Să aplicăm TFI pentru $\begin{cases} F_1(x,y,z) = x + 2y - z - 3 \\ F_2(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy \end{cases}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$, pentru a obţine $y = f_1(x), z = f_2(x)$.

$F_1, F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), F_1(1,1,0) = F_2(1,1,0) = 0, \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(1,1,0) = 7 \neq 0$, deci conform TFI există $V = V(1) \in \mathcal{V}(1), U = U(1,0) \in \mathcal{V}(1,0)$ astfel încât $\forall x \in V(1)$, sistemul are soluţie unică $(y, z) \in U(1,0)$ şi funcţiile soluţie $y = f_1(x), z = f_2(x)$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $V(1)$.

Înlocuind în sistem avem $\begin{cases} x + 2f_1(x) - f_2(x) - 3 = 0 \\ x^3 + f_1^3(x) + f_2^3(x) - 2xf_1(x) = 0 \end{cases}$

şi derivând (în raport cu x), se obţin $f_1'(x), f_2'(x)$.

TFI. m.n. (m **ecuaţii cu** n **necunoscute)** (forma generală)

Exemplu. Determinaţi extremele funcţiei $y(x)$ definită de ecuaţia implicită $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Rezolvare. Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $y = y(x)$ din ecuaţia implicită $F(x, y) = 0$.

În plus, $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$. Prin urmare,

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y^2 \neq x \end{cases},$$ rezultând punctul critic $M(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. În vecinătatea acestui punct, este deci definită funcţia $y = y(x)$, iar $y'(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Întrucât $y^{''}(x) = -(\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x})'$, vom avea

$$y^{''}(x) = -\frac{[2x + \frac{x^2-y(x)}{y^2(x)-x}](y^2(x) - x) - (x^2 - y(x))[1 + 2y(x)\frac{x^2-y(x)}{y^2(x)-x}]}{(y^2(x) - x)^2} = -\frac{2x}{y^2(x) - x},$$

obţinând că $y^{''}(\sqrt[3]{2}) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}} = -2 < 0$, deci $x = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim, iar maximul funcţiei $y(x)$ este $\sqrt[3]{4}$.

TEOREMA DE INVERSARE LOCALĂ.

Reamintim pentru început următorul rezultat din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală:

Teoremă *(derivabilitatea funcţiei inverse) Dacă* $f : I_{\text{interval deschis}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este derivabilă pe* I *şi* $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, *atunci* $\exists\ f^{-1} : f(I) \to I$, *este derivabilă pe* $f(I)$ *şi* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $\forall y \in f(I)$.

Vom prezenta în continuare generalizarea la $\mathbb{R}^n$ a acestui rezultat, care se obţine folosind TFI (forma generală): rolul derivatei va fi jucat de jacobianul funcţiei, despre care se va presupune că este, de clasă $\mathcal{C}^1$ (deci mai mult decât diferenţiabilă):

Teoremă (de inversare locală) *Fie* $F = (f_1, f_2, .., f_n) : D_{\text{deschisă}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ *şi* $a \in D$. *Dacă* $\det J_F(a) \neq 0$, *atunci* $\exists V_{\text{deschisă}} \in \mathcal{V}(a), V \subseteq D$ *astfel ca mulţimea* $F(V)$ *este deschisă şi* F *stabileşte un difeomorfism (sau transformare regulată) între* V *şi* $F(V)$ *(adică* $\exists F^{-1} : F(V) \to V$ *şi* $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(F(V))$*).*

Probleme propuse.

1. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin:

i) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$;
ii) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x > 0, y > 0$;
iii) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3$;
iv) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$;
v) $f(x, y) = x^2 + y^4$;
vi) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
vii) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
viii) $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$;
ix) $f(x, y) = (x - a)(x - b)(y - a)(y - b), a, b \in \mathbb{R}$, arbitrari, fixaţi (discuţie).

2. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin:

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;
ii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x,y,z > 0$;
iii) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), x,y,z \in (0,\pi)$;
iv) $f(x,y,z) = 2(xy+z) - x^2 - y^2 - z^2$.

3. Aflaţi triunghiul de arie maximă care se poate înscrie într-un cerc de rază dată R.

4. Determinaţi triunghiul de arie maximă şi de perimetru egal cu $2p$.

5. Dintr-o cantitate dată de tablă, se construieşte un vas fără capac, având forma unui paralelipiped dreptunghic. Determinaţi dimensiunile vasului astfel încât capacitatea sa să fie maximă.

6. Determinaţi în interiorul unui patrulater un punct, astfel ca suma pătratelor distanţelor acestui punct la vârfurile patrulaterului să fie minimă.

7. Determinaţi constanta k astfel încât funcţia f, definită prin $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + k$, să aibă un minim egal cu 0.

8. Înscrieţi într-un con circular drept, un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

9. Funcţiile $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ sunt definite implicit de relaţiile $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1. \end{cases}$ Calculaţi u'_x, v'_x, u'_y, v'_y.

10. Se consideră funcţia $y = f(x)$ definită implicit prin relaţia $x^2 + y^2 + 2axy = 0, a > 1$. Calculaţi $f'(x), f''(x)$.

11. Calculaţi $f'(1)$ pentru funcţia $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

12. Arătaţi că sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^2u^2 + xzv + y^2 = 0 \\ yzu + xyv^2 - 3x = 0 \end{cases}$ determină în mod unic u şi v ca funcţii de x, y, z într-o vecinătate a punctului $(u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 3, 3, -3)$. Calculaţi apoi $u'_x, u'_y, u'_z, v'_x, v'_y, v'_z$.

13. Aplicaţi TFI pentru $\begin{cases} F_1(x,y,z) = x + 2y - z - 3 \\ F_2(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy \end{cases}, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$, pentru a obţine $y = f_1(x), z = f_2(x)$.

14. Fie $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia implicită $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$. Calculaţi derivatele sale parţiale de ordinul 2.

15. Relaţiile $\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 = a^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$ definesc implicit $y = \varphi(x), z = \psi(x)$. Calculaţi $\varphi'(x), \psi'(x)$.

16. Calculaţi derivatele parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ pentru funcţia explicită $z = z(x,y)$ definită implicit de $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

17. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = yf(\frac{z}{y})$ (f fiind de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul său maxim de definiţie) verifică relaţia $(x^2 - y^2 - z^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

18. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei implicite $y = f(x)$ definită prin $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ astfel încât $f(1) = 0$.

19. Determinaţi extremele funcţiei $z(x, y)$ definită de ecuaţia implicită $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

20. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei în punctul (x_0, y_0) al elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

21. Arătaţi că, în condiţiile teoremei de existenţă şi derivabilitate a funcţiilor implicite, funcţia explicită $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}) = 0$, satisface ecuaţia $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

22. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{x}{y}, \frac{x}{x^2+y^2+z}) = 0$, verifică ecuaţia $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.